

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ  
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ: ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ  
АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Учебно – методическое пособие по курсам «Математическое моделирование и компьютерный эксперимент» и «Механика жидкости и газа»

Специальности:

010200 – прикладная математика и информатика

010500 – механика

Воронеж 2003

Утверждено научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики ВГУ от 10 октября 2003 г.

Составитель Коржов Е.Н.

Рецензент – заведующий кафедрой теоретической механики Воронежской государственной технологической академии, доктор технических наук, профессор В.Н. Колодежнов

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре теоретической и прикладной механики Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3 курса, обучающихся по специальностям 010500 – механика и 010200 – прикладная математика и информатика

Настоящее учебно-методическое пособие представляет собой сборник задач, включающий рекомендации, советы и указания по их решению, и предназначен для студентов дневного отделения, специализирующихся по кафедре теоретической и прикладной механики. Помимо формулировки заданий даётся указание на литературу, которая может быть использована при их выполнении.

В отличие от предыдущих изданий в настоящее пособие включен ряд новых задач, а также добавлен раздел об использовании математического пакета Mathcad при выполнении лабораторных занятий. Это осуществлено как с целью развития практических навыков использования пакетов программ для численного решения краевых задач, так и в силу ряда тех удобств, которые предоставляют пакеты такого класса для визуализации результатов компьютерного эксперимента.

## Общие методические указания к решению задач

Во всех задачах формулировка задания на исследование одна и та же:

***Выполнить теоретическое исследование и установить основные закономерности и особенности течения жидкости и её взаимодействия с твердыми стенками канала (или объема другой формы, в котором происходит движение).***

С этой целью необходимо выполнить постановку задачи (сформулировать концептуальную модель и построить математическую) и дать краткую характеристику полученной краевой или начально-краевой задачи (математической модели). Найти и изучить её точное или приближенное аналитическое решение – построить профиль скорости и график распределения давления в области течения. Получить выражения и вычислить основные характеристики потока: расход, среднюю и максимальную скорости течения, распределение сдвиговых: компонент тензора напряжений (эпюры напряжений), значения интенсивности сил трения на ограничивающих поверхностях и их вращающего момента (для задач с вращением жидкости). Указать особые точки профиля скорости и эпюры напряжений (точки экстремума, перегиба). Получить выражение для диссипативной функции и рассчитать величину полной диссипации механической энергии, а также определить коэффициент гидравлического сопротивления и необходимые условия реализации данного типа движения.

Руководствуясь полученным заданием, студент выбирает основные физические факторы, определяющие поведение исследуемого объекта, и формулирует его концептуальную или качественную модель. После этого на основе уравнений Навье-Стокса строится соответствующая математическая модель, представляющая собой совокупность дифференциальных уравнений и условий однозначности её решения - начальные и/или граничные условия. На третьем этапе выполнения задания даётся исследование полученной математической задачи, включающее в себя краткую характеристику задачи, приведение её к безразмерному виду, определение критериев подобия и оценку порядков величин, входящих в математическую модель. Во многих случаях удобно привести систему уравнений к нормальному виду или записать дифференциальное уравнение в канонической форме. Четвертый этап посвящен выбору или разработке метода решения и его применению к полученной задаче. На пятом этапе выводятся и записываются выражения для основных характеристик рассматриваемого процесса или явления, которые дают наиболее исчерпывающий ответ на вопрос о возможности протекания изучаемого явления при тех или иных условиях. На заключительном этапе работы производится подготовка и проведение вычислительного эксперимента на персональном компьютере с помощью одного из развитых математических пакетов, таких как, например, Mathcad, Maple, Matlab и т.п. Визуализация результатов многопараметрического анализа должна быть осуществлена в наглядной и удобной для понимания форме при помощи развитых графических возможностей паке-

та. Выполнение задания завершается формулировкой выводов об основных закономерностях и особенностях изучаемого процесса или явления в зависимости от его собственных физико-химических свойств и параметров окружающей среды.

Оформление отчета о выполнении задания осуществляется в текстовом редакторе *MS Word* в соответствии с требованиями к лабораторным работам по компьютерному эксперименту. Результаты работы в пакете Mathcad вставляются в подготовленный текстовый документ.

Для определения круга вопросов, на которые необходимо дать ответ в ходе выполнения задания, используется литература, указанная в приведенном списке. Для каждой задачи может быть приведена одна или несколько ссылок. Студент может воспользоваться любой из них. Ссылки на источники в квадратных скобках означают следующее: номер издания в списке литературы, помещенном в конце пособия, затем после двоеточия следуют через точку номера тома, главы, параграфа, пункта и т.д., после чего через запятую указаны страницы.

## **1. Движение жидкости между параллельными плоскими стенками**

### *1.1. Течение в плоском канале под действием перепада давления.*

Вязкая несжимаемая жидкость движется между параллельными плоскими стенками, находящимися на заданном расстоянии друг от друга. Причиной, вызывающей течение, является действие перепада давления в канале [1:2.17,80-81; 2:8.88,435-436; 22:2.11,421-423; 36:2.5,55-56; 40:1.5,32-33; 45:2.6.2-3,68].

### *1.2. Движение в плоском канале с одной движущейся стенкой(плоская задача Куэтта).*

Расстояние между параллельными плоскими стенками задано. Вязкая жидкость, находящаяся между ними, движется за счет перемещения одной из них в своей плоскости с известной постоянной скоростью [1:2.17,79-80;22:2.11,423-424; 34:4.3,121-124; 36:2.5,51-53; 41:3.5.1,66-67].

### *1.3. Движение в плоском канале с двумя движущимися стенками.*

Вязкая несжимаемая жидкость, находящаяся между двумя параллельными плоскими стенками, движется вследствие перемещения обеих поверхностей в своих плоскостях с некоторыми заданными скоростями [1:2.17,79-80; 22:2.11,423-424; 34:4.3,121-124; 36:2.5.1,51-53; 41:3.5,66-67].

а) Движение стенок в противоположных направлениях; б) движение стенок в одну сторону; в) скорости стенок равны или различны.

### *1.4. Течение под действием перепада давления в канале с движущейся стенкой.*

Вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство между двумя параллельными плоскими стенками, одна из которых движется в своей плоскости с заданной постоянной скоростью, а вторая неподвижна. В канале задан

перепад давления. Расстояние между стенками известно [22:2.11,423-424; 34:4.3,121-124; 36:2.5.1,51-53; 67:5.1.1,83-84;].

*1.5. Течение под действием перепада давления в канале с движущимися стенками.*

В плоском горизонтальном канале с двумя параллельными плоскими движущимися стенками находится вязкая несжимаемая жидкость. Стенки движутся в своих плоскостях с постоянными скоростями. Известен перепад давления и расстояние между стенками [22:2.11,423-424; 34:4.3,121-124; 36:2.5.1,51-53; 67:5.1.1,83-84]: а) стенки движутся в одном направлении; б) стенки движутся в противоположных направлениях; в) перепад давления может быть положительным или отрицательным.

*1.6. Течение в плоском наклонном канале.*

Движение вязкой несжимаемой жидкости происходит между параллельными плоскими стенками, образующими заданный угол с горизонтом [27:2.17,78-79; 31:7.9,350-353]: а) наличие перепада давления вдоль канала; б) отсутствие перепада давления; в) действия перепада давления и сила тяжести совпадают/не совпадают.

*1.7. Движение в длинной замкнутой прямоугольной полости с движущейся стенкой.*

Движение вязкой несжимаемой жидкости в длинной прямоугольной горизонтальной области вызвано перемещением верхней стенки в своей плоскости с постоянной скоростью. Нижняя стенка неподвижна. Рассматривается лишь центральная область течения без учета особенностей, вызванных наличием боковых ограничивающих стенок.

*Примечание:* При постановке задачи помимо граничного условия прилипания на каждой стенке, записывается условие замкнутости полости [7,48].

## **2. Движение жидкости в прямых и кольцевых трубах**

*2.1. Течение в круговой цилиндрической трубе под действием перепада давления (течение Хагена-Пуазейля).*

В круглой цилиндрической трубе заданного радиуса под действием известного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкость [1:2.17.1,81-82; 2:8.88,433-443; 3:4.4.2,233-235; 22:2.12,427-432; 34:4.5,126-130; 36:2.5.3,56-58; 40:1.5,33-34; 41:3.5.3,72-75; 45:2.3,52-55; 51:2.5,50-51; 52:1.5,23-24; 55:9.331,732-733; 67:5.1.2,84-86].

*2.2. Движение в кольцевой цилиндрической трубе под действием перепада давления*

В прямой трубе кольцевого сечения, образованной соосными цилиндрами заданных радиусов, вязкая несжимаемая жидкость движется под действием известного перепада [1:2.17,82; 14:8.3,330-331; 34:4.6,130-132; 36:2.5.4,60-61; 45:2.4,57-59; 55:9.332.1,734-735]

*2.3. Течение между соосными цилиндрами, один из которых движется.*

В кольцевой цилиндрической трубе, образованной двумя соосными круговыми цилиндрами, находится вязкая несжимаемая жидкость. Один из ци-

линдров движется поступательно вдоль оси с заданной скоростью, а второй – неподвижен [1:2.17,83; 36:2.5.1,53-55; 45:2.3,69-70]: а) движется внутренний цилиндр; б) движется внешний.

*2.4. Течение между движущимися соосными цилиндрами.*

Вязкая несжимаемая жидкость находится между двумя соосными круговыми цилиндрами, которые поступательно перемещаются с заданными скоростями вдоль общей оси [36:2.5.1,53-55]: а) движение в одну или противоположные стороны; б) скорости равны или различны.

*2.5. Течение под действием перепада давления между цилиндрами, один из которых движется.*

Между соосными цилиндрами с заданными радиусами под действием известного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкость. Один из цилиндров неподвижен, а второй движется поступательно вдоль своей оси с постоянной скоростью [36:2.5.4,60-61; 51:7.7,393-395]: а) внутренний неподвижен; б) внешний неподвижен.

*2.6. Течение между движущимися цилиндрами при наличии перепада давления.*

Вязкая несжимаемая жидкость движется под действием заданного перепада давления между соосными круговыми цилиндрами заданных радиусов. Оба цилиндра перемещаются поступательно вдоль общей оси с известными постоянными скоростями [36:2.5.1,53-55; 36:2.5.4,60-61].

*2.7. Движение жидкости в замкнутой кольцевой цилиндрической полости, одна из цилиндрических областей которой движется, а вторая неподвижна.*

Движение вязкой несжимаемой жидкости происходит в замкнутой удлиненной кольцевой области, образованной соосными цилиндрами, расположенными горизонтально. Причиной, вызывающей движение жидкости, является перемещение одной из цилиндрических поверхностей параллельно оси с заданной постоянной скоростью. Вторым цилиндр неподвижен. Рассматривается лишь центральная область течения без учета особенностей, вызванных наличием боковых ограничивающих стенок: а) внутренний цилиндр движется параллельно общей оси цилиндров при неподвижном внешнем цилиндре; б) внешний цилиндр движется, а внутренний неподвижен.

*Примечание:* При постановке задачи помимо граничного условия прилипания на каждом из цилиндров записывается условие замкнутости полости [49].

*2.8. Течение в наклонной цилиндрической трубе.*

Вязкая несжимаемая жидкость движется в круглой цилиндрической трубе, наклоненной к горизонту на заданный угол [26:2.17,78-79; 31:7.9,350-353]: а) отсутствие внешнего перепада давления; б) наличие внешнего перепада давления.

*Примечание:* Наличие угла наклона приводит к необходимости учета действия гравитационных сил. Постановка задач для наклонных каналов и труб может быть осуществлена и для многих других задач данного и последующих разделов.

### *2.9. Течение в трубе эллиптического сечения.*

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в прямой трубе эллиптического сечения под действием известного перепада давления. Эллипс задан длинами его полуосей [1:2.17.2,82-83; 2:8.88,438-439; 55:9.332.2,735-736].

### *2.10. Течение в трубе прямоугольного поперечного сечения.*

Течение вязкой несжимаемой жидкости происходит в прямой трубе, сечение которой прямоугольник. Движение вызвано заданным перепадом давления [2:8.88,439-442]: а) прямоугольник в сечении; б) квадрат в сечении.

### *2.11. Течение в трубе треугольного поперечного сечения.*

Исследуется течение вязкой несжимаемой жидкости в прямой трубе, поперечным сечением которой является равносторонний треугольник. Движение происходит за счет заданного перепада давления. [1:2.17.3,83;2:8.88,439]

### *2.12. Течение в трубе с сечением в виде гиперболического сегмента (Задача Знаменского).*

Прямая труба, сечение которой образовано контуром в виде ветви гиперболы, пересеченной отрезком прямой, ортогональным её оси симметрии, используется для течения вязкой несжимаемой жидкости при заданном перепаде давления [18].

### *2.13. Течение в угловом зазоре (Вторая задача Знаменского).*

Вязкая несжимаемая жидкость движется в угловом зазоре прямой трубы, сечение которой образовано ветвью гиперболы и пересекающим её отрезком прямой, параллельной оси симметрии ветви гиперболы [19].

### *2.14. Течение в угловом канале (Третья задача Знаменского).*

Течение вязкой несжимаемой жидкости происходит под действием перепада давления в канале, образованном пересечением двух плоскостей [20].

### *2.15. Течение в трубе, образованной полыми цилиндрами прямоугольного поперечного сечения.*

Две прямые трубы прямоугольного поперечного сечения вложены одна в другую и имеют общую центральную ось. Между ними под действием заданного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкость.

### *2.16. Течение в трубе, образованной полыми цилиндрами треугольного поперечного сечения.*

Две прямые трубы с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника, вложены одна в другую и имеют общую центральную ось. Под действием заданного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкость, находящаяся между трубами.

## **3. Вращательные движения жидкости**

### *3.1. Круговое течение между вращающимися цилиндрами (задача Куэтта).*

Соосные круговые заданных радиусов цилиндры вращаются вокруг общей оси с известными постоянными угловыми скоростями. Между цилиндра-

ми находится вязкая несжимаемая жидкость [1:2.18,85-86; 22:2.15,449-452; 34:7.8,134-136; 36:2.5.5,62-64; 41:3.5.2,67-72; 45:5.3-6,110; 51:2.4,48-49; 52:1.5,24-25; 67:5.1.3,86-87].

*3.2. Круговое движение между соосными цилиндрами, один из которых вращается.*

Вязкая несжимаемая жидкость находится между круговыми концентрическими цилиндрами заданных радиусов. Один из цилиндров неподвижен, а второй вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью [45:5.3-1,93-95; 67:5.1.3,86-87]: а) внутренний вращается; б) внешний вращается.

*3.3. Круговое движение жидкости во вращающемся цилиндре.*

Вязкая жидкость находится внутри цилиндра заданного радиуса, вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

*3.4. Круговое движение жидкости вокруг вращающегося цилиндра.*

Вязкая жидкость приводится в движение вращением цилиндра, помещенного в нее. Линии тока лежат в плоскости, ортогональной оси вращения [55:9.333,736-737].

*3.5. Движение жидкости, вызванное вращением диска (задача Кармана)*

Тонкий диск заданного радиуса вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости. Течение является пространственным [27:2.11,70-73; 35:1.2, 17-20; 67:5.2, 97-103].

*3.6. Движение жидкости, вызванное вращением в ней твердой сферы.*

Сфера заданного радиуса вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости [55:9.333,737-739]: а) течение является плоским; б) течение - пространственное.

## **4. Спиральные течения жидкости**

*4.1. Течение Пуазейля во вращающейся трубе.*

Вязкая несжимаемая жидкость движется под действием осевого перепада давления в круглой цилиндрической трубе, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

*4.2. Течение Пуазейля во вращающейся кольцевой трубе.*

Течение вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между соосными круговыми цилиндрами, вызвано продольным перепадом давления и вращением цилиндров с одинаковыми угловыми скоростями.

*4.3. Спиральное течение Куэтта.*

Между соосными круговыми цилиндрами находится вязкая несжимаемая жидкость. Цилиндры вращаются и одновременно поступательно перемещаются вдоль своей общей оси с постоянными скоростями. Градиент давления вдоль оси отсутствует [53:6.43,192-196]: а) один из цилиндров только вращается; б) один из цилиндров только перемещается поступательно.



#### 4.4. *Спиральное течение Куэтта – Пуазейля.*

Вязкая несжимаемая жидкость, заполняющая пространство между двумя круговыми соосными цилиндрами, движется под действием осевого перепада давления. Цилиндры вращаются вокруг своей общей оси, но не участвуют в поступательном перемещении [53:6.43,192-196]: а) оба цилиндра вращаются; б) вращается только внутренний цилиндр; в) вращается только внешний цилиндр).

#### 4.5. *Обобщенное спиральное течение Куэтта - Пуазейля.*

Вязкая несжимаемая жидкость находится между двумя соосными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с постоянными угловыми скоростями. Кроме того, цилиндры перемещаются поступательно вдоль своей оси с известными постоянными скоростями. Задан также осевой перепад давления [53:6.43,192-196]: а) угловые скорости равны; б) угловые скорости различны).

#### 4.5. *Сложное спиральное течение.*

Движение вязкой несжимаемой жидкости вызвано осевым перепадом давления, поступательным движением одного и вращательным движением другого цилиндра [53:6.43,192-196]: а) внутренний вращается, внешний перемещается поступательно; б) внешний вращается, внутренний перемещается поступательно.

### 5. **Плёночные течения жидкости со свободной поверхностью**

#### 5.1. *Гравитационное течение пленки жидкости по наклонной плоскости.*

Слой жидкости постоянной толщины под действием собственного веса стекает по неподвижной наклонной плоскости, составляющей с горизонтом заданный угол. Верхняя поверхность слоя свободная. На нижней поверхности слоя выполняются условия прилипания [1:2.18,84; 2:8.88,436; 3:4.2,236-237; 22:2.5.11,424-427; 27:12.131,668-671; 34:4.4,124-126; 40:1.3,22-23; 45:2.2,46-50; 56:6.1.2.1,87-88].

#### 5.2. *Пленочное течение жидкости по движущейся наклонной плоскости.*

Жидкая пленка постоянной толщины стекает под действием гравитационных сил по наклонной плоскости, движущейся в своей плоскости с постоянной скоростью. Вектор скорости движущейся поверхности параллелен направлению стекания пленки [1:2.18,84; 22:2.5.11,424-427; 45:2.2,46-50]: а) наклонная поверхность движется вверх; б) наклонная поверхность движется вниз).

#### 5.3. *Течение по наклонной плоскости с учетом сил трения*

Слой жидкости постоянной толщины стекает под действием сил тяжести по неподвижной наклонной плоскости, образующей с горизонтом известный угол. На свободной верхней поверхности слоя жидкости действует постоянное касательное усилие [1:2.18,84; 22:2.5.11,424-427; 45:2.2,46-50].

#### 5.4. *Стекание слоя жидкости по движущейся наклонной плоскости с учетом поверхностных сил трения*

Жидкость в виде слоя постоянной толщины стекает по наклонной поверхности, движущейся в направлении, параллельном линии естественного

ската. На верхней поверхности слоя жидкости действует постоянное касательное напряжение [1:2.18,84;. 45:2.2,46-50]: а) наклонная плоскость движется вверх; б) поверхность движется вниз.

*5.5. Стеkanie пленки жидкости по наклонной плоскости с учетом сложных граничных условий на верхней поверхности*

Слой жидкости постоянной толщины под действием собственного веса стекает по наклонной плоскости. На верхней границе слоя действует сдвиговое касательное напряжение, пропорциональное скорости движения свободной поверхности: а) наклонная плоскость неподвижна; б) – наклонная плоскость движется параллельно линии естественного ската вниз; в – наклонная плоскость движется параллельно линии естественного ската вверх.

*5.6. Стеkanie по горизонтально перемещающейся наклонной плоскости*

Тонкий слой жидкости постоянной толщины стекает под действием сил тяжести по наклонной плоскости, образующей с горизонтом известный угол. Наклонная поверхность перемещается горизонтально с постоянной скоростью. Верхняя поверхность слоя свободна (а – перемещение в сторону уклона плоскости; б – перемещение в сторону, противоположную уклону плоскости).

*5.7. Гравитационное стекание пленки жидкости по вертикальной плоскости*

Тонкая пленка жидкости медленно стекает по вертикальной плоскости под действием гравитационных сил. Толщина плёнки считается постоянной [27:12.131,669-670].

*5.8. Гравитационное стекание пленки жидкости по вертикальной цилиндрической поверхности*

Жидкость в виде пленки постоянной толщины стекает по вертикальной цилиндрической поверхности заданного радиуса под действием собственного веса [45:2.6.2\_5,69].

*5.9. Гравитационное пленочное течение жидкости по поверхности конуса.*

Тонкий слой жидкости постоянной толщины стекает по поверхности кругового конуса с заданными параметрами под действием собственного веса [45:2.6.3\_20,117].

*5.10. Сдувание пленки жидкости, находящейся на горизонтальной поверхности*

Плёночное течение жидкости, находящейся на твердой поверхности, происходит под воздействием воздушного потока над её поверхностью [27:12.132,671-673].

*5.11. Растекание капельки жидкости по горизонтальной поверхности*

По горизонтальной смоченной поверхности растекается капля жидкости под действием капиллярных сил. Число Рейнольдса достаточно мало [64:9.1, 272-276]: а) с учетом действия сил Ван-дер-Ваальса; б) без учета. Определяется краевой угол смачивания и изменение параметров капельки со временем.

*Примечание.* Инерционные члены в уравнении движения не учитываются.

*5.11. Поднятие жидкости в узком капилляре*

В тонком узком капилляре происходит поднятие жидкости, хорошо смачивающей поверхность капилляра [27:7.67,381-382; 64:9.2,276-280]: а) без учета сил Ван-дер-Ваальса; б) с учетом.

*5.12. Нанесение тонкого слоя жидкости на движущуюся поверхность (Задача Ландау-Левича).*

Пластина вытягивается с постоянной скоростью из неограниченного объема жидкости. На её поверхности остается тонкая плёнка [27:12.133,674-682; 64:9.3,280-285].

*5.13. Пленочное течение жидкости по поверхности вращающегося диска.*

Растекание жидкости происходит по поверхности диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг оси, ортогональной его плоскости. *Варианты:* а) без учета сил Ван-дер-Ваальса; б) с учетом.

## **6. Двухслойные течения жидкости**

6.1. Между параллельными плоскими стенками, находящимися на заданном расстоянии друг от друга, под действием известного перепада давления происходит послойное течение двух вязких несмешивающихся жидкостей с различными физическими свойствами. Толщины слоев обеих жидкостей во всем канале различны, но постоянны вдоль оси канала [45:2.5,60-62].

6.2. Под действием гравитационных сил по наклонной плоскости происходит двухслойное стекание жидкой пленки постоянной толщины. Верхняя поверхность жидкости свободна. Толщины обоих слоев жидкости постоянны [40:1.3,24-25].

6.3. В круговой цилиндрической трубе под действием заданного перепада давления происходит осесимметричное течение двух вязких не перемешивающихся жидкостей с различными физическими свойствами. Радиус цилиндрического потока одной жидкости и толщина кольцевого слоя другой известны и постоянны.

6.4. Между вращающимися цилиндрами реализуется двухслойное течение вязких жидкостей с различными физическими свойствами. Перемешивания жидкостей не происходит. Толщины слоев известны и постоянны.

6.5. На горизонтальной плоскости находится тонкая двухслойная пленка жидкости, на свободной поверхности которой действует постоянное сдвиговое усилие. В результате этого воздействия реализуется течение в виде двух слоев постоянной толщины.

### **Примечания:**

1. Подобный подход в постановке задач механики жидкости используется при исследовании движения стратифицированных сред, биологических и некоторых других жидкостей [4,7,9].
2. Постановки задач о двухслойных течениях могут быть осуществлены и для ряда других задач, приведенных в данном пособии.

3. Определенный теоретический и практический интерес представляют также задачи для трехслойных течений (например, при рассмотрении эффекта Фареуса – Линдквиста) или  $n$  – слойных.

### **7. Разные задачи о движениях тел в вязкой жидкости**

Большинство задач, представленных в данном разделе, решается в рамках приближения Стокса, когда инерционные члены в уравнении движения не учитываются [1; 24; 43; 50; 66].

#### *7.1. Обтекание твердой сферической частицы поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости (задача Стокса).*

Твердую сферическую частицу заданного радиуса обтекает однородный поступательный поток вязкой несжимаемой жидкости с некоторой скоростью. Вязкость жидкости известна. Получить выражение для силы взаимодействия потока с обтекаемой частицей [2:8.92,458-463].

#### *7.2. Задача о движении шара в неограниченной вязкой жидкости.*

Твердое шарообразное тело движется с невысокой постоянной скоростью в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости. [40:2.2,48-49]

#### *7.3. Задача о движении сферической капельки в несжимаемой жидкости, с которой не происходит смешивания (задача Адамара - Рыбчинского).*

Капля вязкой несжимаемой жидкости заданных размеров движется с известной постоянной невысокой скоростью в другой вязкой жидкости бесконечного объема, не смешиваясь ней. [27:8.70,393-400]

#### *7.4. Задача о схлопывании сферической каверны в вязкой жидкости (Обобщенная задача Брезант-Релея).*

В неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости, которая находится в состоянии покоя, внезапно возникает сферическая полость заданного радиуса. Требуется найти изменение давления в любой точке жидкости, радиуса пузырька и время заполнения полости жидкостью. Давление вдали от каверны постоянно [54: 4.5,136-141].

#### *7.5. Задача о колебании газового пузырька в вязкой жидкости (обобщенная задача Релея).*

Небольшой газовый пузырек совершает колебательные движения в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости под воздействием гармонических колебаний давления вдали от пузырька. Амплитуда и частота колебаний заданы. Требуется определить влияние вязкости жидкости на изменения радиуса пузырька [33:2.8.19,225-240].

#### *7.5. Всплывание сферического пузырька в покоящейся вязкой жидкости.*

Газовый пузырек достаточно малого заданного размера всплывает в покоящейся жидкости с заданной глубины [30:5.5,178-183].

#### *7.6. Движение пористой сферической частицы в неограниченной жидкости.*

Шарик из пористого материала движется с невысокой постоянной скоростью в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости. Требуется по-

лучить выражение для силы сопротивления, действующей на частицу [Журов А.И., Полянин А.Д., Потапов Е.Д.//Изв.АН СССР.Сер.МЖГ.1995,№3. С.113-120].

*7.7. Движение в неограниченной жидкости твердой сферической частицы, покрытой пористым слоем.*

Шарик из твердого недеформируемого материала, покрытый пористым сферическим слоем постоянной толщины, движется с невысокой постоянной скоростью в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости [Васин С.И., Старов В.М., Филиппов А.Н.//Коллоид.журн. 1996. Т.58, №3. С.298-302].

*7.8. Движение в неограниченной жидкости твердой сферической частицы, покрытой тонким слоем жидкости*

Шарик из твердого недеформируемого материала, покрытый сферическим слоем жидкости постоянной толщины, движется с невысокой постоянной скоростью в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости, не перемешивающейся с жидкой оболочкой.

*7.9. Обтекание капель с мембранной фазой.*

Однородный поток жидкости с заданными физическими свойствами обтекает каплю другой жидкости, на поверхности которой находится в качестве оболочки или мембраны тонкий сферический слой жидкости третьего сорта [40:2.2,49-50].

*7.10. Движение пористой сферической частицы, покрытой тонким жидким слоем, в неограниченной газовой среде.*

Шарик из пористого материала, покрытый тонкой пленкой жидкости постоянной толщины, движется с невысокой постоянной скоростью в неограниченном объеме газа. Требуется получить выражение для силы сопротивления, действующей на движущуюся частицу.

*7.10. Всплывание газового пузырька, покрытого жидкой оболочкой.*

Газовый пузырек достаточно малого размера, покрытый тонким слоем жидкости, всплывает в покоящейся жидкости другого сорта, не перемешиваясь с ней [Johnson R.E., Sadhal S.S. // Ann. Rev. Fluid Mech. 1985 v.17 pp.289-320].

*7.11. Всплывание растворяющегося газового пузырька в покоящейся жидкости.*

Газовый пузырек достаточно малого размера всплывает с заданной глубины в вязкой жидкости, растворяясь в ней. Начальная концентрация и растворимость газа в жидкости известны [70].

*7.12. Движение в вязкой жидкости сферической оболочка из пористого материала.*

В неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости движется сферическое тело, представляющее собой достаточно тонкую оболочку из пористого материала конечной толщины. Требуется получить выражение для силы сопротивления, действующей на частицу, а также установить основные закономерности движения жидкости внутри оболочки.

## 8. Конвективные течения вязкой жидкости.

### 8.1. Теплопередача через движущийся слой жидкости.

Вязкая несжимаемая жидкость движется в плоском канале под действием заданного перепада давления. Стенки канала имеют различные температуры. Определить плотность теплового потока через движущийся слой жидкости [67:12.6.2,280-281].

### 8.2. Свободно-конвективное течение между вертикальными плоскостями.

Течение жидкости происходит в вертикальном замкнутом плоском канале, стенки которого имеют постоянные, но различные температуры [49:2.14.2, 239-243].

### 8.3. Свободно-конвективное течение в наклонной щели.

Естественная конвекция в центральной области замкнутой наклонной щели [49:2.14.2.4,246-247] ( а – нижняя сторона имеет более высокую температуру; б – верхняя сторона имеет более высокую температуру).

### 8.4. Диффузия в плоском ламинарном потоке жидкости.

Жидкость, содержащая примесь некоторого вещества, движется в плоско параллельном канале. На нижней стенке происходит осаждение примеси, через верхнюю стенку перенос вещества не происходит [68].

### 8.5. Конвективная диффузия в системе с полупроницаемой мембраной

Вязкая несжимаемая жидкость движется в плоском канале, содержащем полупроницаемую мембрану, параллельную стенкам канала. Концентрация некоторого вещества по разные стороны мембраны различна. Определить основные закономерности процессов массопереноса в системе [68].

### 8.6. Диффузия в периодическом поле скорости.

Жидкость совершает движения вдоль некоторого направления по гармоническому закону во времени и по ортогональной к направлению движения координате. Концентрация вещества в жидкости имеет градиент вдоль направления движения [17:1.6,77-80].

## 9. Течения в системах с проницаемыми поверхностями

Во всех задачах данного раздела решение ищется методом малого параметра, в качестве которого выбирается число Рейнольдса, рассчитываемое по скорости вдува/отсоса.

### 9.1. Течение между параллельными пористыми стенками (Задача Бермана).

Вязкая несжимаемая жидкость движется под действием заданного осевого перепада давления между параллельными плоскими пористыми стенками, находящимися на известном расстоянии друг от друга. Через пористые стенки осуществляется вдув или отсос жидкости с некоторой постоянной скоростью [15:5.1,143-145].

*Варианты:* а) вдув; б) отсос; в) через одну стенку вдув, а через вторую отсос; г) одна из стенок изготовлена из пористого материала, а вторая – непроницаема; д) вдув под углом к поверхности стенок; е) вдув/отсос не равно-

мерный; ж) вдув под углом по/против направления потока в канале; з) течение в наклонном канале с учетом сил гравитации.

### *9.2. Течение в канале с пористыми стенками, одна из которых движется.*

В плоском канале, образованном пористыми пластинами, под действием заданного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкость. Одна из стенок канала перемещается в своей плоскости с известной постоянной скоростью, а вторая неподвижна.

*Варианты:* а) вдув/отсос через обе стенки; б) вдув/отсос через неподвижную стенку; в) вдув/отсос через движущуюся стенку; г) вдув/отсос под углом к плоскости стенки; д) только движущаяся стенка пористая; е) из пористого материала только неподвижная стенка; ж) неравномерный вдув/отсос; з) перепад давления и скорость движения стенки в одну и ту же сторону/в противоположные стороны; и) отсутствует осевой перепад давления; к) через одну стенку вдув, а через другую отсос; л) вдув под углом по/против направления потока; м) течение в наклонном канале с учетом сил гравитационных сил; н) двухслойное течение не перемешивающихся жидкостей.

### *9.3. Движение жидкости в прямолинейной трубе из пористого материала.*

Под действием заданного перепада давления в прямолинейной трубе кругового сечения движется вязкая несжимаемая жидкость. Через проницаемые стенки трубы осуществляется вдув/отсос с заданной постоянной скоростью [14:5.2,157-160].

*Варианты:* а) сечение трубы эллиптическое / прямоугольное / треугольное / сегмент с параболой или гиперболой; б) сечение трубы кольцевое круговое / эллиптическое / прямоугольное / треугольное / сегмент с параболой или гиперболой.

### *9.4. Гравитационное течение пленки жидкости по наклонной плоской пористой поверхности*

Под действием гравитационных сил по наклонной плоскости из пористого материала происходит пленочное стекание вязкой несжимаемой жидкости.

*Варианты:* а) вдув/отсос; б) наклонная поверхность перемещается в своей плоскости с постоянной скоростью; в) вдув/отсос под углом к наклонной плоскости; г) вдув/отсос под углом к плоскости по/против линии ската; д) двухслойная пленка.

### *9.5. Движение жидкости, вызванное вращением в ней проницаемого диска*

Диск из пористого материала вращается в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости с постоянной скоростью. Давление по разные стороны диска различно [13:2.8,34-41].

### *9.6. Вращательное движение жидкости между пористыми цилиндрами.*

Соосные круговые цилиндры из пористого материала вращаются вокруг общей оси с некоторыми заданными постоянными угловыми скоростями. Через одну цилиндрическую поверхность происходит вдув, через другую отсос со скоростями, обеспечивающими нулевой суммарный расход.

### 9.7. *Спиральные течения между пористыми цилиндрическими поверхностями*

Течение вязкой несжимаемой жидкости, находящейся между соосными пористыми круговыми цилиндрами, вызвано продольным перепадом давления и вращением цилиндров с одинаковыми угловыми скоростями.

## 10. Решение автомодельных краевых задач пограничного слоя

### 10.1. *Решение автомодельной задачи Блазиуса обтекания пластины.*

Вязкая несжимаемая жидкость обтекает тонкую пластину конечной длины. Вектор скорости набегающего потока вдали от пластины параллелен её плоскости. Число Рейнольдса достаточно велико [67:7.5,129-135].

### 10.2. *Решение автомодельной задачи Фолкнера – Скэн (методом пристрелки).*

Поток вязкой несжимаемой жидкости обтекает клин таким образом, что его скорость вдали от него пропорциональна некоторой степени расстояния от передней критической точки [67:9.1,156-158].

### 10.3. *Решение задачи Польшаузена о свободной конвекции около вертикальной пластины.*

Пластина заданных размеров помещается в вязкую несжимаемую жидкость с температурой, отличной от температуры пластины [49:1.3.3,75-78; 67:12.8,303-307].

### 10.4. *Решение задачи о конвективной диффузии к плоской вертикальной поверхности.*

На плоской вертикальной поверхности, находящейся в вязкой несжимаемой жидкости, происходит достаточно быстрая гетерогенная реакция с веществом, растворенным в жидкости. Движение жидкости возникает вследствие изменения концентрации вблизи реакционной поверхности [27:2.23,133-142].

### 10.5. *Задача о плоской затопленной струе (задача Шлихтинга-Бикли).*

Струя несжимаемой вязкой жидкости вытекает из тонкой продольной щели в полупространство, заполненное такой же средой [59:4.3,118-121; 67:9.7,176-179].

### 10.6. *Задача об осесимметричной затопленной струе (задача Шлихтинга).*

Вязкая несжимаемая жидкость истекает в виде струи из небольшого кругового отверстия в плоской стенке в полупространство этой же среды. Закрутка потока отсутствует [1:2.23,118-121; 67:11.2,224-227].

### 10.7. *Течение в окрестности критической точки*

Натекание вязкой несжимаемой жидкости на плоскую поверхность, расположенную ортогонально направлению потока жидкости (а – плоская задача; б – пространственная задача) [67:5.2,92-97].

### 10.8. *Течение в следе за телом.*

В безграничной неподвижной вязкой жидкости движется некоторое тело, за которым образуются течение типа свободной струи [8].



## **11. Нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости**

### *11.1. Течение, вызванное внезапно приведенной в движение плоской стенки (I задача Стокса).*

Плоская стенка, ранее покоившаяся, внезапно начинает двигаться в своей собственной плоскости с некоторой постоянной скоростью [67:5.1.4,87-89].

### *11.2. Разгонное течение вязкой жидкости в плоском канале.*

В бесконечно длинном плоском канале находилась неподвижная жидкость. В некоторый момент внезапно возникает перепад давления, в дальнейшем сохраняющий свое первоначальное значение [67:5.1.7,89-90].

### *11.3. Течение вязкой жидкости вблизи колеблющейся пластины (II задача Стокса).*

Неограниченная плоская стенка совершает в своей плоскости установившиеся гармонические колебания [67:5.1.7,90-91].

### *11.4. Разгонное течение вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе.*

В прямой трубе с круговым сечением жидкость начинает двигаться под действием внезапно наложенного постоянного перепада давления [67:5.1.7,89-90].

### *11.5. Пульсирующее движение вязкой жидкости в плоском канале.*

Движение вязкой жидкости в плоском канале осуществляется под действием установившегося изменяющегося по гармоническому закону перепада давления.

### *11.6. Пульсирующее движение вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе.*

Установившееся пульсирующее движение жидкости происходит под действием гармонически изменяющегося со временем перепада давления [2:8.91,455-458].

## **12. Задачи вычислительной гидродинамики**

### *12.1. Движение жидкости или газа в плоской прямоугольной полости с движущейся верхней стенкой (задача Кавагути).*

В замкнутой прямоугольной полости конечных размеров верхняя стенка движется в своей плоскости с заданной скоростью, а три другие – неподвижны [Kawaguti M. // J. Phys. Soc. (Japan). 1961. v.16, N.11. pp.2307-2315].

### *12.2. Течение в канале с одиночным уступом (Задача Симуни).*

В плоском прямолинейном канале под действием заданного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкость. На некотором расстоянии от входа канал имеет уступ, то есть резкое изменение ширины в одну из сторон [Симуни Л.М. // Инженерный журн. 1964. т.4, №3. С.446-450]: а) прямой уступ; б) обратный уступ.

### *12.3. Течение в плоском канале с прямоугольной ямой.*

В плоском прямолинейном канале имеет место стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости под действием заданного перепада давления. На

нижней стенке канала имеется прямоугольное углубление с заданными параметрами [Mills R.D. // J. Aeronaut. Soc. 1965. V.69, N.658. pp.714-718].

*12.4. Течение в плоском канале с одиночным прямоугольным выступом.*

В плоском прямолинейном канале происходит стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости под действием заданного перепада давления. На нижней стенке канала имеется небольшой прямоугольный выступ с заданными параметрами [Гвоздков Н.Н. Разгонное течение ньютоновской жидкости. ВГУ, 1976. 12 с.].

*12.5. Течение в плоском канале с разделяющей пластиной.*

Плоский прямолинейный канал имеет обратный уступ с разделяющей пластиной конечной длины. В канале движется вязкая несжимаемая жидкость [Симуни Л.М. // Гидродинамика. Вып.2. Пермь, 1970. С.17-180].

*12.6. Течение в плоском канале, внезапно расширяющемся в обе стороны.*

Течение вязкой несжимаемой жидкости происходит под действием перепада давления в плоском канале, который внезапно расширяется в обе стороны. Известным считается: а - расход жидкости, б – перепад давления [Lewis J.P., Pletcher R.H. // Trans. ASME: JBE, 1986. N.2. pp.284-294].

*12.7. Течение в плоском канале, внезапно сужающемся в обе стороны.*

Течение вязкой несжимаемой жидкости происходит под действием перепада давления в плоском канале, который внезапно сужается в обе стороны. Известным считается: а - расход жидкости, б – перепад давления [Durst F., Schierholz W.F., Wunderlich A.M. // Trans ASME: JFE. 1987, N.4 pp.376-387].

*12.8. Течение в плоском канале со вставками.*

В прямолинейном плоском канале, содержащем прямоугольные периодически расположенные вставки, под действием заданного перепада давления движется вязкая несжимаемая жидкостью.

*12.9. Движение жидкости в круговом цилиндрическом сосуде конечной высоты, вызванное вращением ее крышки с постоянной угловой скоростью (Задача Дорфмана).*

Вязкая несжимаемая жидкость полностью наполняет круглый цилиндрический сосуд, верхняя стенка которого вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси [Дорфман Л.А., Романенко Ю.Б. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1966. №.5. с.63-68].

*12.10. Задача о гидродинамическом волчке (Задача Тарунина- Якимова).*

Кольцевая область, образованная концентрическими цилиндрами конечных размеров и плоскими основаниями, раскручивается в течение заданного промежутка времени с некоторым постоянным угловым ускорением. После чего внешнее усилие снимается, и вращение волчка происходит по инерции при действии сил трения [Тарунин Е.Л., Якимов А.А. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1988. №2. С.37-42].

*12.11. Смешение плоских ламинарных струй (Задача Лойцянского-Симуни).*

Из регулярно расположенных конечных отверстий в плоской стенке в полупространство вытекает та же жидкость [Симуни Л.М. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1966, №1. С.149-150].

*12.12. Развитие ламинарной струи в плоском канале (Задача Вулиса)*

В полубесконечный плоский канал, заполненный вязкой жидкостью, через торцевое конечное отверстие втекает струя этой же жидкости [Вулис Л.А., Джаугаштин К.Е. // ПМТФ. 1968, №6. С.120-123].

*12.13. Численный анализ явления схлопывания кавитационного пузырька.*

В неограниченном объеме вязкой жидкости мгновенно возрастает давление, под действием которого происходит смыкание сферической газовой полости [Ivanu P.D., Hemmit F.G. // Trans. ASME: Ser.D J. Bas. Eng 1965. N.4].

*12.14. Движение и испарение капли в высокотемпературном газовом потоке.*

Небольшая сферическая капля попадает в высокотемпературный газовый поток с теплофизическими параметрами, отличными от параметров жидкости. Кинематические характеристики капли и потока также различны [29, 40, 45, 68, 70].

*12.15. Свободно - конвективное движение вязкой жидкости в прямоугольной полости.*

В замкнутой прямоугольной полости, боковые стенки которой нагреты до некоторых постоянных, но различных температур, движение возникает за счет действия архимедовых сил. Горизонтальные поверхности: а) теплоизолированы; б) изготовлены из хорошо проводящего тепло материала [10, 49].

**Примечание:** При решении задач данного параграфа используется метод установления. В качестве начального условия удобно задавать распределения скорости и давления, соответствующие статическому равновесию в системе. С этой целью можно воспользоваться постановками соответствующих задач, например, из [73]. Граничные условия также должны быть при этом преобразованы к нестационарному виду путем введения коэффициента «граничного установления», предложенного Н.Н. Гвоздковым [20].

### 13. Пример выполнения задания

В качестве примера дается изложение решения задачи Хагена-Пуазейля для ламинарного течения в круглой цилиндрической трубе при заданном перепаде давления - задача № 2.1.

#### 13.1. Разработка задания для исследования

Выполнить теоретическое исследование и установить основные закономерности и особенности изотермического течения однородной вязкой несжимаемой жидкости в прямолинейной трубе кругового поперечного сечения под действием заданного перепада давления. Найти распределение скорости и давления в трубе, определить закон изменения расхода от величины перепада давления, построить профиль скорости и эпюру сдвиговых напряжений, рассчитать коэффициент гидравлического сопротивления, а также величину диссипации механической энергии.

#### 13.2. Формулировка концептуальной (качественной или физической) модели течения

Пренебрегая краевыми эффектами, можно рассмотреть течение жидкости в бесконечной круглой цилиндрической трубе радиуса  $r_0$  под действием градиента давления, обусловленного падением давления  $\Delta p_0$  на участке заданной протяженности  $l_0$ . Предполагается, что установившееся течение является осесимметричным с линиями тока, параллельными оси трубы. Действие массовых сил не учитывается, а на внутренней поверхности трубы выполняется условие прилипания. Рассматривается изотермический процесс, и жидкость считается несжимаемой средой с заданными физическими свойствами  $\rho$  - плотность,  $\mu$  - вязкость. Причиной, вызывающей движение, является перепад давления вдоль трубы.

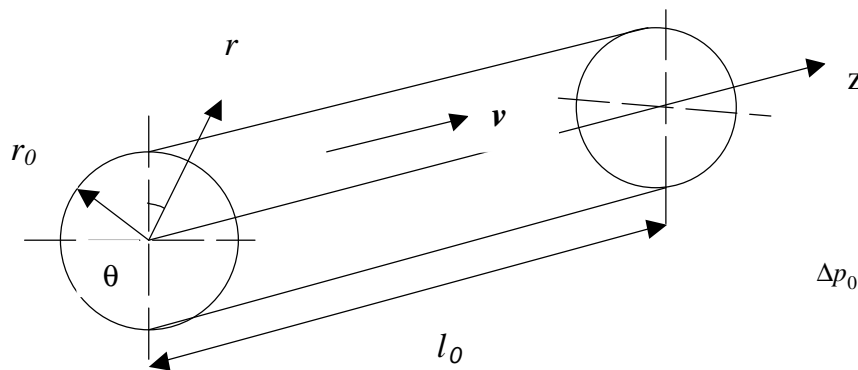


Рис.1. Общая схема течения жидкости в круглой цилиндрической трубе

#### 13.3. Построение математической модели

Поскольку область течения является цилиндрической, то рассмотрение соответствующей математической модели целесообразнее проводить в системе координат также цилиндрической  $(r, \theta, z)$ . Полные уравнения Навье – Сто-

кса, описывающие ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости, в цилиндрической системе координат имеют следующий вид [1, 2]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + f_r; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + f_\theta; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z + f_z; \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

где  $\rho$  - заданная плотность,  $\nu = m/\rho$  - кинематический коэффициент вязкости,  $m$  - коэффициент вязкости, называемый «динамическим»;  $p$  - давление;  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $v_z$  - компоненты вектора скорости;  $\nabla^2$  - оператор Лапласа, имеющий в цилиндрической системе координат следующий вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

Упрощение исходных уравнений (1)-(4) производится с учётом сформулированных ранее гипотез, определяющих качественную или концептуальную модель реального течения. В силу стационарности и осесимметричности течения все частные производные по времени и координате  $\theta$  равны нулю, то есть  $\partial v_i / \partial t = 0$  и  $\partial v_i / \partial \theta = 0$  для  $i = r, \theta, z$  и  $\partial p / \partial \theta = 0$ . Поскольку массовые силы не учитываются, то все  $f_i$  в уравнениях (1)-(4) надо положить равными нулю.

Далее, так как вектор скорости  $\mathbf{v}$  параллелен оси  $z$ , то он имеет лишь одну компоненту, отличную от нуля, то есть  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$  или  $v_r = v_\theta = 0$ . В этом случае из уравнения неразрывности (4) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z = v(r),$$

то есть неизвестная величина  $v_z$  не зависит от переменной  $z$  и является лишь функцией пространственной координаты  $r$ , то есть компонента скорости  $v_z = v(r)$ .

Кроме того, из уравнений (1) и (2) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p = p(z).$$

С учётом всего вышеизложенного уравнение (3) упрощается и может быть записано через обыкновенные производные вместо частных

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (6)$$

В обыкновенное дифференциальное уравнение (6) входит две неизвестные функции -  $v=v(r)$  и  $p=p(z)$ , зависящие от разных переменных. Следовательно, левая и правая части уравнения (6) должны быть равны некоторой константе, которая определяется с учетом дополнительных условий относительно неизвестной функции  $p=p(z)$ . Действительно, если

$$\frac{dp}{dz} = C_1 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 p}{dz^2} = 0, \quad (7)$$

то после его интегрирования находим, что  $p(z) = C_1 z + C_2$  и для нахождения функции  $p=p(z)$  достаточно задать два граничных условия, например,

$$z=0: \quad p(0) = p_0; \quad z=l: \quad p(l) = p_1. \quad (8)$$

Для интегрирования уравнения (6) после определения константы  $C_1$  необходимо сформулировать условия однозначности определения функции  $v=v(r)$ . Можно задать два следующих граничных условия:

$$r=r_0: \quad v(r_0) = 0, \quad (9)$$

$$r=0: \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0. \quad (10)$$

Первое из них представляет собой выражение условия прилипания или непротекания жидкости на внутренней поверхности трубы, а второе – условие отсутствия особой точки у профиля скорости на оси трубы. Это условие эквивалентно физическому предположению о невозможности неограниченного возрастания значения скорости на оси трубы и её симметричности относительно оси  $Z$ .

### ***13.4. Исследование полученной математической модели***

Таким образом, предложенная модель представляет собой совокупность двух двухточечных краевых задач (7.2), (8) и (6), (9), (10) для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных функций –  $v(r)$  и  $p(z)$ . Причем краевая задача для функции  $p(z)$  интегрируется отдельно от второй краевой задачи для функции  $v(r)$ . Для таких краевых задач решение существует, единственно, а их уравнения допускают непосредственное прямое интегрирование.

В построенной математической модели пять числовых параметров, каждый из которых может принимать значения из некоторого диапазона допустимых значений.

### ***13.5. Преобразование математической модели***

Прежде всего необходимо выполнить анализ подобия полученной задачи. С этой целью определим характерные величины или масштабы для зависимых и независимых переменных. Для пространственных переменных они опреде-

ляются интервалом, на котором происходит их изменение – для радиальной координаты – радиус трубы  $r_0$ , для осевой – длиной трубы  $l_0$ , в которой известно падение давления  $\Delta p_0 = p_0 - p_1$ . Поэтому приведение этих переменных к безразмерному виду можно выполнить следующим образом:

$$\xi = \frac{r}{r_0}, \quad \zeta = \frac{z}{l_0}, \quad P = \frac{p - p_1}{p_0 - p_1}. \quad (11)$$

Для скорости мы не можем указать характерную величину, используя исходные данные задачи. В этом случае в качестве нормирующей величины можно выбрать такую комбинацию известных данных, чтобы она совпадала по размерности с размерностью скорости. Обозначим эту неизвестную величину через  $v_*$  и выполним приведение к безразмерному виду уравнения (6).

$$\frac{v_*}{r_0^2} \left( \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dV}{d\xi} \right) = \frac{p_0 - p_1}{\mu l_0} \frac{dP}{d\zeta}.$$

Тогда на основании равенства порядков величин, характеризующих баланс внешнего перепада давления и сил внутреннего трения, можно заключить, что в качестве характерной величины для скорости  $v_*$  может быть выбран комплекс  $\frac{\Delta p_0 r_0^2}{l_0 \mu}$ . То есть безразмерная скорость может быть введена по правилу

$$V = \frac{v}{\frac{\Delta p_0 r_0^2}{l_0 \mu}}. \quad (12)$$

В новых безразмерных переменных совокупность двух полученных краевых задач переписется в следующем виде:

- для функции  $P(\zeta)$  получаем простейшее уравнение -  $\frac{d^2 P}{d\zeta^2} = 0$ , которое должно быть проинтегрировано с учетом граничных условий

$$\zeta = 0: P(0) = 1, \quad \zeta = 1: P(1) = 0; \quad (13)$$

- для функции  $V(\xi)$  уравнение имеет вид  $\frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dV}{d\xi} = \frac{dP}{d\zeta}$ , а граничные условия для него

$$\xi = 0: \frac{dV}{d\xi} = 0, \quad \xi = 1: V(1) = 0. \quad (14)$$

Отметим, что в правой части уравнения (14) стоит константа, которая определяется из предшествующего интегрирования краевой задачи (13). Другой особенностью полученного решения является отсутствие безразмерных числовых параметров в уравнениях и краевых условиях. В случае, когда такие параметры содержатся в построенной модели, необходимо рассмотреть все возможные предельные случаи с целью последующего отыскания возможных асимптотических решений задачи.

### 13.6. Нахождение решения двухточечных краевых задач

Прямое двукратное интегрирование уравнения (13) даёт выражение

$$P(\zeta) = C_1 \zeta + C_2,$$

подстановка которого в граничные условия (13) приводит к нахождению констант интегрирования -  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 1$ . Окончательное выражение для распределения безразмерного давления имеет вид

$$P(\zeta) = 1 - \zeta. \quad (15)$$

С учетом найденного решения (15) уравнение (14) примет вид

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dV}{d\xi} = -1.$$

Левая часть последнего уравнения может быть представлена в ином виде, а само уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dV}{d\xi} \right) = -1 \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dV}{d\xi} \right) = -\xi.$$

Проинтегрировав последнее уравнение один раз, получим

$$\xi \frac{dV}{d\xi} = -\frac{1}{2} \xi^2 + C_3 \quad \text{или} \quad \frac{dV}{d\xi} = -\frac{1}{2} \xi + \frac{C_3}{\xi}.$$

Ещё раз выполним интегрирование полученного уравнения и найдём выражение для  $V$

$$V(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^2 + C_3 \ln \xi + C_4. \quad (16)$$

Определим константы интегрирования. Так как функция  $V(\xi)$  должна быть ограничена, а её производная должна быть равна нулю при  $\xi = 0$ , то необходимо положить константу  $C_3 = 0$ . Константа  $C_4$  определяется из второго граничного условия (14) и имеет значение, равное  $\frac{1}{4}$ . Таким образом, окончательное выражение для безразмерной скорости потока в трубе запишется следующим образом:

$$V(\xi) = \frac{1}{4} (1 - \xi^2). \quad (17)$$

### 13.7. Анализ полученного решения

Прежде всего требуется убедиться, что полученные выражения (15) и (17) являются решением краевой задачи. После их подстановки в уравнения (13) и (14) последние тождественно удовлетворяются. Затем убеждаемся, что выполняются и граничные условия.

Теперь требуется проанализировать поведение полученных решений только лишь как функций соответствующих аргументов. Если бы в выражения



безразмерного давления или скорости входили какие-либо числовые параметры, то следовало бы выполнить исследование зависимости решения от параметра, а также рассмотреть предельные случаи, когда этот параметр изменяется в области своих допустимых значений. Функция  $P(\zeta)$  линейно убывает на отрезке  $[0,1]$ , принимая значения на его концах равные, соответственно, 1 и 0. Функция является монотонно убывающей с постоянным углом наклона, равным  $-1$ . Поведение её представлено на рис.2а.

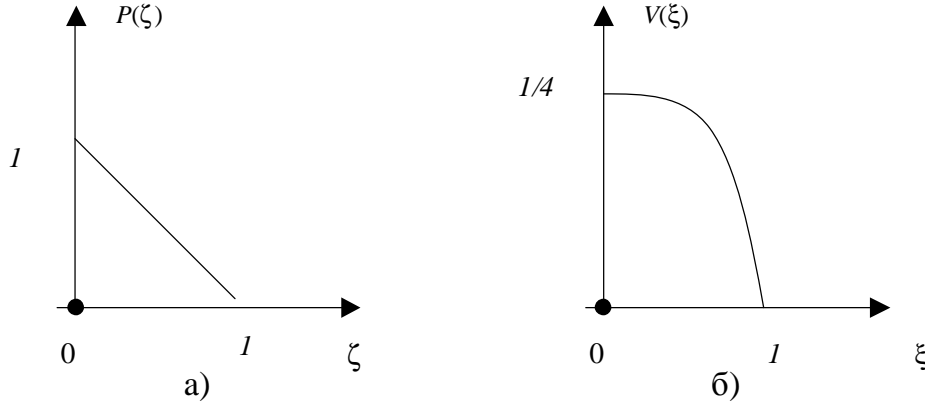


Рис.2 Вид функций  $P(\zeta)$  (рисунок - а) и  $V(\xi)$  (рисунок - б).

Функция  $V(\xi)$  представляет собой правую ветвь «перевернутой» и поднятой вверх по оси ординат параболы. Функция монотонно убывает на отрезке  $[0,1]$  по параболическому закону, в точке  $r_0$  обращается в ноль. В точке  $r=0$  её производная обращается в ноль. Функция является выпуклой на всем отрезке. Максимальное значение её, достигаемое в точке  $r=0$ , равно  $\frac{1}{4}$ .

### 13.8. Вычисление основных характеристик потока

Распределение скорости по сечению трубы определяется выражением, получаемым после перехода от безразмерной функции  $V(\xi)$  к размерной  $v(r)$

$$v(r) = \frac{1}{4\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) (r_0^2 - r^2). \quad (18)$$

Профиль скорости изображён на рис.3(а).

Используя решение (16), можно получить выражение для объёмного расхода жидкости. С этой целью достаточно выбрать элементарную площадку в ортогональном сечении трубы  $dS = dr \cdot dl$ , где  $dr$  - элементарное приращение радиальной координаты от произвольной точки в сечении трубы с координатами  $(r, \theta)$ ,  $dl$  - элементарное изменение по дуговой координате  $\theta$ . Отметим, что  $dl = r \cdot d\theta$ . Элементарный расход через площадку  $dS$  можно определить как произведение скорости на площадь элементарной поверхности, то есть

$$dQ = v(r) \cdot dS.$$

Полный расход жидкости через поперечное сечение трубы определится путем интегрирования выражения для  $dQ$  по всему сечению

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} v(r) \cdot r dr d\theta$$

Так как подинтегральная функция не зависит от переменной  $\theta$ , то выражение для определения расхода можно записать в виде одномерного интеграла

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} r v(r) dr. \quad (19)$$

После подстановки выражения для скорости из (18) в выражение (19) и интегрирования находим

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \text{ или } Q = \frac{\pi \Delta p_0 r_0^4}{8\mu l_0}. \quad (20)$$

Полученное соотношение (20.2) выражает известный классический результат механики жидкости – закон Гагена – Пуазейля [1]:

*При установившемся ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе кругового сечения секундный объемный расход жидкости пропорционально перепаду давления на единицу трубы и четвертой степени её радиуса (или диаметра).*

Выражение (20.2) может быть представлено также в другом виде

$$\Delta p_0 = \frac{8\mu l_0}{\pi r_0^4} Q, \quad (21)$$

соответствующем закону сопротивления, который формулируется следующим образом:

*При установившемся ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости падение давления в цилиндрической трубе кругового сечения пропорционально секундному объемному расходу, вязкости жидкости и длине трубы, а также обратно пропорционально четвертой степени её радиуса (диаметра).*

Выражение (21) может быть преобразовано к традиционному виду, если ввести в него величину, определяемую как средняя скорость течения – отношение объемного расхода к площади поперечного сечения,

$$\bar{v} \equiv \frac{Q}{S} = \frac{\Delta p_0 r_0^2}{8\mu l_0}. \quad (22)$$

Поскольку в гидравлике принято записывать закон сопротивления в виде

$$\Delta p_0 = \zeta \frac{\rho \bar{v}^2}{2},$$

то сопоставление полученного выражения с (21) позволяет получить выражение для коэффициента гидравлического сопротивления

$$\zeta = \frac{64}{Re} \frac{l_0}{d_0}, \quad (23)$$

где  $d_0 = 2r_0$  - диаметр трубы,  $Re = \frac{\bar{v}d_0\rho}{\mu}$  - число Рейнольдса.

Так как в трубе круглого сечения местные гидравлические сопротивления отсутствуют, то из (23) с учетом того, что

$$\zeta = \lambda \frac{l_0}{d_h},$$

где  $d_h$  - гидравлический диаметр канала, определяемый как отношение учетверённой площади поперечного сечения канала к его периметру

$$d_h = \frac{4S}{\Pi},$$

находим выражение для гидравлического коэффициента сопротивления трения

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (24)$$

Отметим, что выражение (24) является результатом точного аналитического решения поставленной задачи.

Максимальное значение скорости течения в трубе, достигаемое на её оси, равно

$$v_{max} = \frac{\Delta p_0 r_0^2}{4\mu}. \quad (25)$$

Сравнивая полученное выражение (25) с выражением для средней скорости (22), устанавливаем весьма полезное соотношение между  $v_{max}$  и  $\bar{v}$

$$v_{max} = 2\bar{v}, \quad (26)$$

показывающее, что максимальная скорость ровно в два раза превосходит величину средней скорости потока в трубе.

Распределение давления по длине трубы определяется линейной зависимостью от осевой координаты

$$p(z) = p_0 - (p_0 - p_1) \frac{z}{l_0}, \quad (27)$$

то есть скорость падения давления в потоке определяется отношением величины полного падения давления к длине трубы (падение давления на единице длины канала).

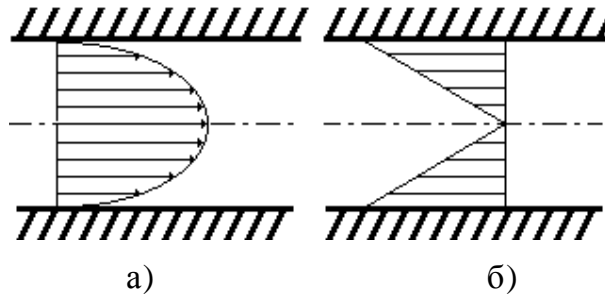


Рис.3 Профиль скорости (а) и эпюра сдвиговых напряжений (б).

Распределение напряжений и другие динамические характеристики движения жидкости определяются компонентами тензора напряжений. В случае модели вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости для цилиндрической системы координат они имеют вид [1:8.64,с.411]

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \quad p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (28)$$

$$p_{r\theta} = p_{\theta r} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \quad p_{rz} = p_{zr} = \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad p_{\theta z} = p_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right).$$

Для рассматриваемой задачи подстановка решения (17) в формулы (28) с учётом того, что лишь осевая компонента скорости отлична от нуля, приводит к выражениям

$$p_{rr} = p_{\theta\theta} = p_{zz} = -p, \quad p_{rz} = p_{zr} = -\frac{1}{2} \left( -\frac{dp}{dz} \right) r, \quad p_{r\theta} = p_{\theta r} = p_{\theta z} = p_{z\theta} = 0. \quad (29)$$

Эпюры сдвиговых компонент тензора напряжений представлены на рис. 3(б).

Следовательно, сдвиговые напряжения в жидкости пропорциональны градиенту давления и расстоянию от оси трубы. Эпюра сдвиговых напряжений представлена на рис.3. Максимальное значение напряжения имеют на стенках трубы. Величина интенсивность сил трения, действующих на внутренней поверхности трубы, определяется касательным напряжением на стенке

$$\tau_w \equiv -p_{rz}|_{r=r_0} = \frac{\Delta p_0 r_0}{2l_0}. \quad (30)$$

Если воспользоваться выражением для средней скорости потока в трубе (22), то можно получить еще одно полезное соотношение, связывающее величину интенсивности сил трения со средней скоростью

$$\tau_w = 4 \frac{\mu \bar{v}}{r_0}. \quad (31)$$

То есть интенсивность сил трения определяется линейной зависимостью от скорости потока и вязкости среды и обратно пропорциональна радиусу трубы.

Расчет числа Рейнольдса для оценки возможности ламинарного режима течения удобно проводить с использованием следующей формулы:

$$Re = \frac{\Delta p_0 \rho r_0^3}{4\mu^2 l_0}.$$

Коэффициент трения для круглой цилиндрической трубы рассчитывается как отношение интенсивности сил трения на стенке к гидродинамическому напору [12]

$$c_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2} = \frac{16}{Re}. \quad (32)$$

Полученное выражение позволяет установить формулу, связывающую коэффициент трения  $c_f$  и гидравлический коэффициент сопротивления трения  $\lambda$ , определяемый выражением (24),

$$\lambda = 4c_f. \quad (33)$$

Другой не менее важной формулой, используемой при проведении расчетов гидросистем, является формула Дарси-Вейсбаха [12, с.156], определяющая потери давления по длине трубопровода,

$$h_g \equiv \frac{\Delta p_0}{\rho g} = c_f \frac{l_0}{r_0} \frac{\bar{v}^2}{2g}. \quad (34)$$

Расчёт диссипативной функции Рэлея, характеризующей переход механической энергии потока в тепло за счет действия сил внутреннего трения в жидкости, осуществляется по формуле [1, с.78-79]

$$D(r) \equiv 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{8\mu} \left( \frac{\Delta p_0}{l_0} r \right)^2, \quad (35)$$

а полная энергия, переходящая в тепло за единицу времени во всём объеме трубы, вычисляется путем интегрирования выражения (35) по этому объёму

$$\dot{E}_{кин} = -2\pi l_0 \int_0^{r_0} D(r) dr = -\frac{\pi \Delta p_0^2 r_0^3}{12\mu l_0}. \quad (36)$$

### Примечания:

1. Другие вопросы и формулы, которые способствуют более глубокому представлению о характере течения жидкости и её взаимодействия с окружающими твердыми поверхностями, студент определяет самостоятельно, используя список литературы, помещенный в конце методического пособия.

2. В случае, когда исследуется течения с вращением жидкости, то необходимо провести вычисление момента сил, действующих на движущийся поток, используя тот же метод перехода от элементарного участка ко всей поверхности, как и в случае определения расхода жидкости через поперечное сечение трубы.

3. После получения всех выражений, способствующих изучению основных закономерностей и установлению особенностей течения, необходимо разработать проект для компьютерного эксперимента и выполнить его реализацию с помощью персонального компьютера. В качестве программного обеспечения рекомендуется использовать один из математических пакетов (**Mathcad**, **Maple**, **Mathlab** и т.п.).

### **13.9. Выводы. Заключение**

1. При ламинарном режиме течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе падение давления пропорционально секунднему объёму движущейся жидкости и длине трубы, а также обратно пропорционально четвёртой степени её радиуса.

2. При заданном перепаде давления объёмный расход жидкости в трубе пропорционален четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален её длине.
3. Профиль скорости является параболическим, а её максимальное значение достигается на оси трубы и определяется выражением (25).
4. Изменение давления в круглой цилиндрической трубе происходит по линейному закону, от его начального значения  $p_0$  до значения на выходе  $p_1$  с постоянным градиентом, определяемым отношением перепада давления к длине трубы. В любом ортогональном сечении трубы давление постоянно.
5. Эпюра сдвиговых напряжений представляет собой линейную зависимость – от нулевого значения на оси трубы до максимального значения на её стенках, определяемого выражением (30).
6. Максимальное значение скорости ровно в два раза превосходит среднюю скорость потока.
7. При увеличении вязкости жидкости величина скорости, её среднее и максимальное значения, объёмный расход и диссипация механической энергии уменьшаются, а сдвиговые напряжения в жидкости и трение на стенках трубы не изменяются.
8. При заданном перепаде давления с ростом радиуса трубы расход возрастает в биквадратичной зависимости.
9. Коэффициент гидравлического сопротивления трения обратно пропорционален числу Рейнольдса с коэффициентом пропорциональности, равным 64.
10. Диссипация механической энергии пропорциональна квадрату перепада давления и кубу радиуса трубы и обратно пропорциональна её длине и вязкости текущей жидкости.
11. При ламинарном стационарном режиме движения жидкости в прямой трубе кругового сечения ни одна из вычисленных кинематических и динамических характеристик не зависит от плотности жидкости.

#### 14. Рекомендации по использованию пакета Mathcad.

С целью исследования вида профилей скорости и эпюр сдвиговых напряжений, а также расчета основных характеристик потока в зависимости от его параметров используется математический пакет Mathcad (См., например, Гурский Д.А. Вычисления в MathCAD. Минск: Новое знание, 2003. 814 с.). Задавание на выполнение решения задачи в Mathcad'е состоит из двух частей.

Документ Mathcad'а должен содержать *заголовок*, включающий номер и «шапку» решаемой задачи, фамилию, имя и отчество, курс и номер группы студента, выполняющего решение. После этого указываются *входные данные задачи*, определенные студентом самостоятельно, и числовые значения с соответствующими комментариями об их содержательном смысле. Требуется записать также единицы измерений для каждой из используемых величин. В *первой части задания* идет раздел с организацией вычислений скорости, давления и сдвиговых напряжений на основе полученного *аналитического решения* задачи. Далее в этом разделе строятся соответствующие *графики*, а также

рассчитываются основные характеристики потока и выводятся их числовые значения. В конце этого раздела строится *график зависимости коэффициента сопротивления* от числа Рейнольдса и, возможно, других параметров течения. Все графики должны иметь удобную для восприятия *разметку* и иметь *подри-суночные подписи*.

Во *второй части задания* в документе приводится численное решение полученной двухточечной краевой задачи с помощью встроенных функций интегрирования задач для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных пакета Mathcad. При выполнении этой части задания рекомендуется самостоятельно ознакомиться с примерами, приведенными в **QuickSheets**, и проделать их в качестве контрольных тестов. Пример выполнения задания в пакете Mathcad приведен в отдельном листинге.

### 15. Таблицы некоторых физических свойств жидкостей (вода)

№ п/п	Наименование	Обозначение	Числовое значение	Единица измерения	Примечания	Источник
1.	Плотность	$\rho$	$0.9971 \cdot 10^3$	кг/м <sup>3</sup>	T=300 K	[24], [49]
2.	Вязкость	$\mu$	$0.89 \cdot 10^{-3}$	кг/мж	T=300 K	[24], [49]
3.	Коэффициент кинематической вязкости	$\nu$	$0.89310^{-6}$	м <sup>2</sup> /с		Вычисл.
4.	Коэффициент поверхностного натяжения	$\sigma$	0.0727	н/м		[24]
5.	Коэффициент теплового объемного расширения	$\beta$	0.00019	K <sup>-1</sup>		[24], [49]
6.	Коэффициент теплопроводности	$\lambda$	0.609	Вт/мж		[49]
7.	Удельная теплоёмкость	$c_p$	0.00418			[24], [49]
8.	Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon$	$0.717 \cdot 10^{-9}$	Ф/м	T=293 K	[24]
9.	Магнитная проницаемость					
10.	Температура кипения	T <sub>кип</sub>	373	K	При н.у.	[24]
11.	Удельная теплота парообразования	$\xi$	$2.26 \cdot 10^6$	Дж/кг		[49]
12.	Температура замерзания	T <sub>отв</sub>	273	K	При н.у.	
	Удельная теплота плавления	$\xi_{пл}$	$3.33 \cdot 10^5$	Дж/кг		[49]
13.	Коэффициент сжимаемости	$\kappa$	$0.47 \cdot 10^{-9}$	Па <sup>-1</sup>		[24]
14.	Число Прандтля	Pr	7			Вычисл.
15.	Молярная концентрация	C <sub>о</sub>	$0.556 \cdot 10^5$	моль/м <sup>3</sup>		А.И.В.
16.	Константа скорости диссоциации молекул воды	k <sub>1</sub>	$2 \cdot 10^{-5}$	с <sup>-1</sup>		
17.	Константа рекомбинации протонов и ионов гидроксила	k <sub>2</sub>	$1.3 \cdot 10^8$	м <sup>3</sup> /мольж		

## 16. Листинг пакета Mathcad

### *Ламинарное течение жидкости в круглой цилиндрической трубе под действием заданного перепада давления*

И.О. Фамилия Зк. гр. мех

#### Исходные данные :

$r_0 := 0.1$	- ширина канала, м
$L_0 := 1$	- длина канала, м
$P_0 := 1 \cdot 10^5$	- давление на входе в канал, Па=н/м <sup>2</sup>
$P_1 := 0.999998 \cdot 10^5$	- давление на выходе из канала, Па
рабочее тело	- вода
$\mu := 0.001$	- коэффициент вязкости, кг/м.с
$\rho := 1000$	- плотность воды, кг/м <sup>3</sup>
$h := 1$	- толщина слоя, м
$n := 10$	- количество точек вдоль радиальной координаты
$m := 10$	- количество точек вдоль осевой координаты

#### Решение задачи:

$$\xi := 0, \frac{1}{n} .. 1 \quad v(\xi) := \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi^2)$$

$$\zeta := 0, \frac{1}{m} .. 1 \quad P(\zeta) := 1 - \zeta$$

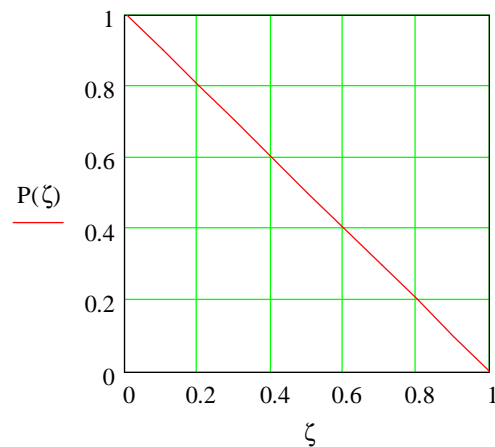
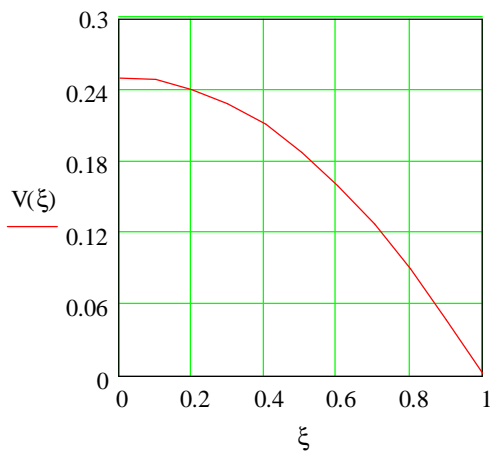


Рис 1. Изменение скорости в сечении трубы.

Рис 2. Измененние давления вдоль трубь



**Анализ полученного решения**

$\Delta P := P_0 - P_1$  - перепад давления в трубе, н/м<sup>2</sup>  $\Delta P = 0.2$

$Q := \frac{\pi \cdot \Delta P \cdot r_0^4}{8 \cdot \mu \cdot L_0}$  - расход жидкости, м<sup>3</sup>/с  $Q = 7.854 \cdot 10^{-3}$

$U_c := \frac{\Delta P \cdot r_0^2}{8 \cdot \mu \cdot L_0}$  - средняя скорость, м/с  $U_c = 0.25$

$U_{max} = \frac{\Delta P \cdot r_0^2}{4 \cdot \mu \cdot L_0}$  - максимальная скорость течения, м/с  $U_{max} = 0.5$

$k := \frac{U_{max}}{U_c}$  - отношение максимальной скорости к средней  $k = 2$

$r := 0, \frac{r_0}{n} \dots r_0$   $u(r) := \frac{\Delta P}{4 \cdot \mu \cdot L_0} \cdot (r_0^2 - r^2)$   $\Pr_z(r) := \frac{-\Delta P}{2 \cdot L_0} \cdot r$

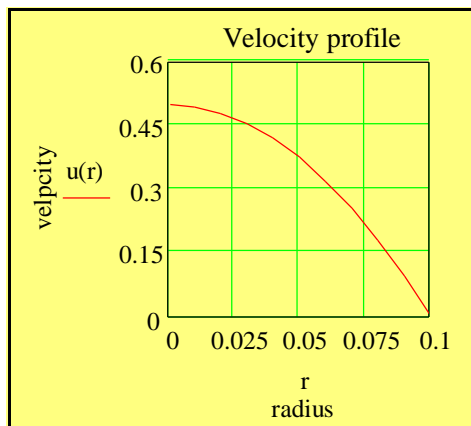


Рис.3. Профиль скорости потока

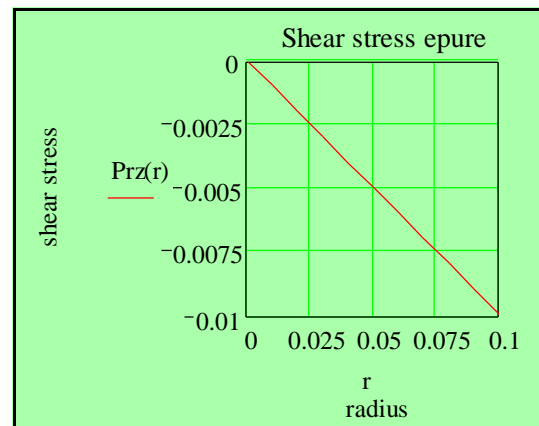


Рис.4. Эпюра сдвиговых напряжений

$\tau_w := \frac{\Delta P \cdot r_0}{2 \cdot L_0}$  - сила трения на единицу площади стенки трубы, н/м<sup>2</sup>  $\tau_w = 10 \times 10^{-3}$

$Re := \frac{\Delta P \cdot \rho \cdot r_0^3}{4 \cdot \mu^2 \cdot L_0}$  - число Рейнольдса  $Re = 5 \times 10^4$

$D := \frac{\pi \cdot \Delta P^2 \cdot r_0^3}{12 \cdot \mu \cdot L_0}$  - диссипация механической энергии в канале  $D = 0.01$

$C_f := \frac{64}{Re}$  - коэффициент сопротивления трения  $C_f = 1.28 \times 10^{-3}$

$\lambda := \frac{96}{Re}$  - коэффициент гидравлического сопротивления трения  $\lambda = 1.92 \times 10^{-3}$

Численное решение задачи с помощью функции Odesolve

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}V(t) + \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dt}V(t) = -1$$

$$V(0.0000000001) = 0$$

$$V(1) = 0$$

V:=Odesolve(t,1)

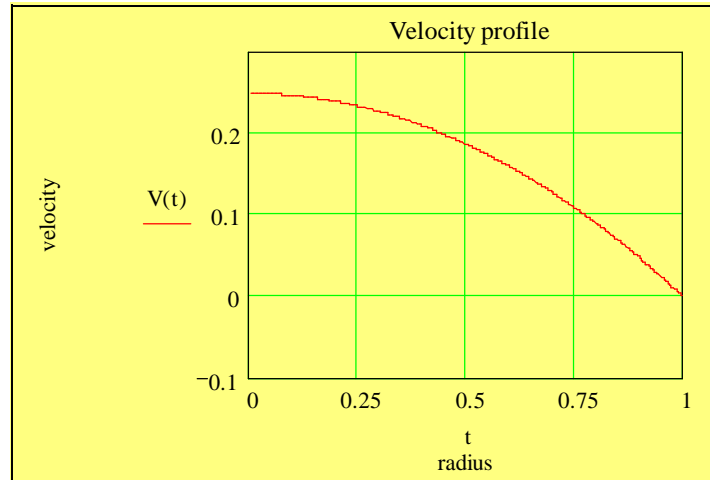


Рис.3 Профиль скорости течения при численном решении

**Выводы:**

1. Профиль скорости является параболическим.
2. Эпюра сдвиговых напряжений в потоке линейна и симметрична относительно с
3. Диссипация механической энергии в канале незначительна.
4. Расход жидкости биквадратичен относительно диаметра трубы.
5. Падение давления пропорционально расходу жидкости или средней скорости и обратно пропорционально четвертой степени диаметра трубы.
6. Коэффициент гидравлического сопротивления совпадает с табличным значением взятым из справочника Идельчика.
7. Аналитическое и численное решения полностью совпадают.
8. Функция работает неустойчиво, так при уменьшении ширины канала, вязкости жидкости или увеличении перепада давления решение получить невозможно.
9. На основании найденного решения затруднительно получить расчет других параметров

### Основная литература

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц: в 10 т. - М.: Наука, 2001. - Т.6. Гидродинамика. - 736 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. М.: Наука, 1987. - 840 с.
3. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкостей / Дж. Бетчелор. - М.: Мир, 1973. - 760 с.

### Дополнительная литература, используемая при постановке задач

4. Белолипецкий В.М. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости / В.М.Белолипецкий, В.Ю.Костюк, Ю.И.Шокин. Новосибирск: Наука, 1991. - 176 с.
5. Валландер С.В. Лекции по гидромеханике / С.В.Валландер. Л.: ЛГУ, 1978. - 296 с.
6. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б. Варгафтик. М.: Наука, 1972. - 720 с.
7. Стратифицированные течения / О.Ф. Васильев, Квон В.И., Лыткин Ю.М. и др. // Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика. - М., 1975. - Т.8. - С.74-131.
8. Вулис Л.А. Теория струй вязкой жидкости / Л.А. Вулис, В.П. Кашкаров. - М.: Наука, 1965. - 432 с.
9. Габов С.А. Задачи динамики стратифицированных жидкостей / С.А. Габов, А.Г. Свешников. М.: Наука, 1986. - 286 с.
10. Гершуни Г.З. Устойчивость конвективных течений / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий. - М.: Наука, 1989. - 320 с.
11. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи / И.П.Гинзбург. - Л.: ЛГУ, 1970. - 320 с.
12. Гиргидов А.Д. Техническая механика жидкости и газа / А.Д.Гиргидов. - СПб.: Изд-во СГТУ, 2001. - 395 с.
13. Дорфман Л.А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел / Л.А. Дорфман. - М.: Физматгиз, 1960. - 260 с.
14. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев. - М.: Высшая школа, 1978. - 463 с.
15. Ерошенко В.М. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях / В.М. Ерошенко, Л.И.Зайчик. - М.: Наука, 1984. - 275 с.
16. Жуковский Н.Е. Лекции по гидродинамике / Н.Е. Жуковский. - М.: Гостехиздат, 1948. - 358 с.
17. Зельдович Я.Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика / Я.Б. Зельдович. - М.: Наука, 1984. - 374 с.
18. Знаменский В.А. Точное решение задачи движения вязкой несжимаемой жидкости в полупризматической трубе / В.А. Знаменский // Прикладная механика. - 1980. - Т.16, №9. - С.141-142.
19. Знаменский В.А. Точное решение задачи движения вязкой несжимаемой жидкости в угловом зазоре / В.А. Знаменский // Прикладные задачи механики сплошных сред. - Воронеж: изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1988. - С.63-65.
20. Знаменский В.А. Точные аналитические решения уравнений Навье-Стокса / В.А. Знаменский, Е.Н. Коржов. - Воронеж: ВГУ, 1990. - 8 с.
21. Идельчик И.Е. Справочник по гидродинамическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. - М.: Машиностроение, 1992. - 672 с.
22. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика: в 2-х частях / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.Е. Розе. - М.: Наука, 1963. - Ч.2. - 728 с.
23. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справ. пособие / С.С. Кутателадзе. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 367 с.
24. Кухлинг Г. Справочник по физике / Г. Кухлинг. - М.: Наука, 1985. - 520 с.
25. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц: в 10 т. - М.: Наука, - 2001. - Т.8. Электродинамика сплошных сред. - 624 с.; Т.10. Физическая кинетика. - 528 с.

26. Ландау Л.Д. Механика сплошных сред / Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 788 с.
27. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика/В.Г. Левич. - М.: Физматгиз,1959. - 700 с.
28. Мигун Н.П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости / Н.П. Мигун, В.В. Прохоренко. - Минск: Наука и техника, 1984. - 264 с.
29. Нигматулин Р.И. Механика многофазных сред / Р.И. Нигматулин: В 2-х частях. - М.: Наука, 1987. - Ч.1. - 464 с. - Ч.2. -360 с.
30. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред / Г.М. Островский. - СПб.: Наука, 2000. - 359 с.
31. Патрашев А.Н. Прикладная гидромеханика / А.Н. Патрашев, Л.А. Кивако, С.И. Гожий. - М.: Воениздат, 1970. - 684 с.
32. Сборник задач по гидродинамике / Под ред. Л.В. Овсянникова. - Новосибирск: НГУ, 1974. - 45 с.
33. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов: В 2 т. - М.: Наука, 1994. - 528+560 с.
34. Слезкин Н.А. Динамика вязкой жидкости / Н.А. Слезкин. - М.: ГИТТЛ, 1955. - 520 с.
35. Соковишин Ю.А. Гидродинамика и газодинамика в примерах и задачах / Ю.А. Соковишин. - Л.: ЛГУ, 1973. - 132 с.
36. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений / С.М. Тарг. - М., Л.: ГИТТЛ, 1951. - 420 с.
37. Федяевский К.К. Гидромеханика / К.К. Федяевский, Я.Н. Войкутский, Ю.И. Фаддеев. - Л.: Судостроение, 1968. - 568 с.
38. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике / Д.А. Франк-Каменецкий. - М.: Наука, 1987. - 502 с.
39. Холпанов А.П. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела / А.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. - М.: Наука, 1990. - 386 с.
40. Химическая гидродинамика: Справ. пособие / А.М. Кутепов, А.Д. Полянин, З.Д. Запрянов и др. - М.: Бюро Квантум, 1996. - 336 с.
41. Черкесов Л.В. Основы динамики несжимаемой жидкости / Л.В. Черкесов. - Киев: Наукова Думка, 1984. - 168 с.
42. Шкадов В.Я. Течения вязких жидкостей / В.Я. Шкадов, З.Д.Запрянов. - М.: МГУ, 1984. - 200 с.
43. Яблонский В.С. Сборник задач и упражнений по технической гидромеханике / В.С. Яблонский, И.А. Исаев. - М.: Физматгиз, 1963. - 200 с.
44. Бернулли Д. Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкости / Д. Бернулли. - М.: изд-во АН СССР, 1959. - 551 с.
45. Берд Р. Явления переноса / Р. Берд, В.Стьюарт, Е. Лайтфут. - М.: Химия, 1974. - 688 с.
46. Бояджиев Х. Массоперенос в движущихся пленках жидкости / Х. Бояджиев, В. Бешков. - М.: Мир, 1988. - 136 с.
47. Дейли Дж. Механика жидкости / Дж. Дейли, Д. Харлеман. - М.: Энергия, 1971. - 480 с.
48. Эринген А.К. Теория микрополярных жидкостей // Механика. - 1969. - №4. - С.79-93
49. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан. и др.: в 2-х книгах. - М.: Мир, 1991. - 678+528 с.
50. Гупта А. Закрученные потоки / А. Гупта, Д. Лилли, Н. Сайред. - М.: Мир, 1987. - 588 с.
51. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г.Бреннер. - М.: Мир, 1975. - 632 с.
52. Хант Д.Н. Динамика несжимаемой жидкости / Д.Н. Хант. - М.: Москва, 1967. - 184 с.
53. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости / Д. Джозеф. - М.: Мир, 1981. - 640 с.
54. Кнепп Р. Кавитация / Р. Кнепп, Дж.Дейли, Ф.Хэммитт. - М.: Мир, 1974. - 688 с.
55. Ламб Г. Гидродинамика / Г. Ламб. - М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. - 928 с.

56. Ле Меоте Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде / Б. Ле Меоте. - Л.: Гидрометеиздат, 1974. - 568 с.
57. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милн-Томпсон. - М.: Мир, 1964. - 655 с.
58. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости: в 2-х Т. / Под ред. С.Гольдштейна. - М.: ГИИЛ, 1948. - 785 с.
59. Бай Ши-и. Теория струй / Ши-и Бай. - М.: Физматгиз, 1960. - 328 с.
60. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика / Дж. Педлоски: В 2-х Т. - М.: Мир, 1984. - 801 с.
61. Plesset M.S. Bubble dynamic and cavitation / M.S. Plesset, A. Prosperetti // Ann. Rev. Fluids Mech. - 1977. - V. 9. - P.145-185.
62. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Л. Прандтль. - М.: ИИЛ, 1949. - 520 с.
63. Праудман И. Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра / И. Праудман, Дж. Пирсон // Механика. - 1958. - №2(48). - с.237-262.
64. Probstein R.F. Physico-chemical hydrodynamics: an introduction. - 2<sup>th</sup> ed. - New York e.a.: Wiley, 1994. - 406 p.
65. Рид Р. Свойства газов и жидкостей / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. - Л.: Химия, 1982. - 591 с.
66. Ричардсон Э. Динамика реальных жидкостей / Э. Ричардсон. - М.: Мир, 1965. - 328 с.
67. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. - М.: Наука, 1974. - 744 с.
68. Шервуд Т. Массопередача / Т. Шервуд, Р. Пигфорд, Ч.Уилки. - М.: Химия, 1982. - 696 с.
69. Слеттери Дж. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах / Дж. Слеттери. - М.: Энергия, 1978. - 448 с.
70. Соу С. Гидродинамика многофазных систем / С. Соу. - М.: Мир, 1971. - 536 с.
71. Ван - Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости / М. Ван - Дайк. - М.: Мир, 1967. - 312 с.
72. Ван - Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / М. Ван - Дайк. - М.: Мир, 1986. - 182 с.
73. Колодежнов В.Н. Теоретическая механика в задачах статики на взаимодействие тел с жидкостью / В.Н. Колодежнов. - Воронеж, 2000. 160 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Общие методические указания к решению задач .....	3
1. Движение жидкости между параллельными плоскими стенками .....	4
2. Движение жидкости в прямых и кольцевых трубах .....	5
3. Вращательные движения жидкости .....	8
4. Спиральные течения жидкости .....	8
5. Плёночные течения жидкости со свободной поверхностью .....	9
6. Двухслойные течения жидкости .....	11
7. Разные задачи о движениях тел в вязкой жидкости .....	12
8. Конвективные течения вязкой жидкости .....	14
9. Течения в системах с проницаемыми поверхностями .....	15
10. Решение автомодельных краевых задач с помощью численных методов .....	16
11. Нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости .....	17
12. Задачи вычислительной гидродинамики .....	18
13. Пример выполнения индивидуального задания .....	20
13.1. Разработка задания для исследования .....	20
13.2. Формулировка концептуальной модели течения .....	20
13.3. Построение математической модели .....	20
13.4. Исследование полученной математической модели .....	22
13.5. Преобразование математической модели .....	22
13.6. Нахождение решения двухточечных краевых задач .....	24
13.7. Анализ полученного решения .....	24
13.8. Вычисление основных характеристик потока .....	25
13.9. Выводы. Заключение. ....	29
14. Рекомендации по использованию пакета Mathcad .....	30
15. Таблицы некоторых физических свойств жидкостей .....	31
16. Листинг пакета Mathcad с численным анализом задачи .....	32
Основная литература .....	35
Дополнительная литература, используемая при постановки задач .....	36

Составитель Коржов Евгений Николаевич  
Редактор Тихомирова О.А.