

Предисловие

Введение

Физические и астрономические константы

Гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ з}^{-1} \text{ с}^{-2}$

Скорость света в вакууме $c = 3.00 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$

Постоянная Планка $h = 6.63 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$

Приведенная постоянная Планка $\hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$

Заряд электрона и протона $e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЕ}$

Масса электрона $m_e = 9.11 \cdot 10^{-28} \text{ з}$

Атомная единица массы $m_u = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ з}$

Классический радиус электрона $r_e = e^2 m_e^{-1} c^{-2} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$

Постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{К}$

Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{К}^{-4}$

Универсальная газовая постоянная $\Re = 8.31 \cdot 10^7 \text{ эрг з}^{-1} \text{ К}^{-1}$

Масса Солнца $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{33} \text{ з}$

Радиус Солнца $R_\odot = 6.96 \cdot 10^{10} \text{ см}$

Светимость Солнца $L_\odot = 3.83 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}$

Масса Земли $M_\oplus = 5.98 \cdot 10^{27} \text{ з}$

1 парсек $3.09 \cdot 10^{18} \text{ см}$

1 эв $= 1.60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} = 1.16 \cdot 10^4 \text{ К}$

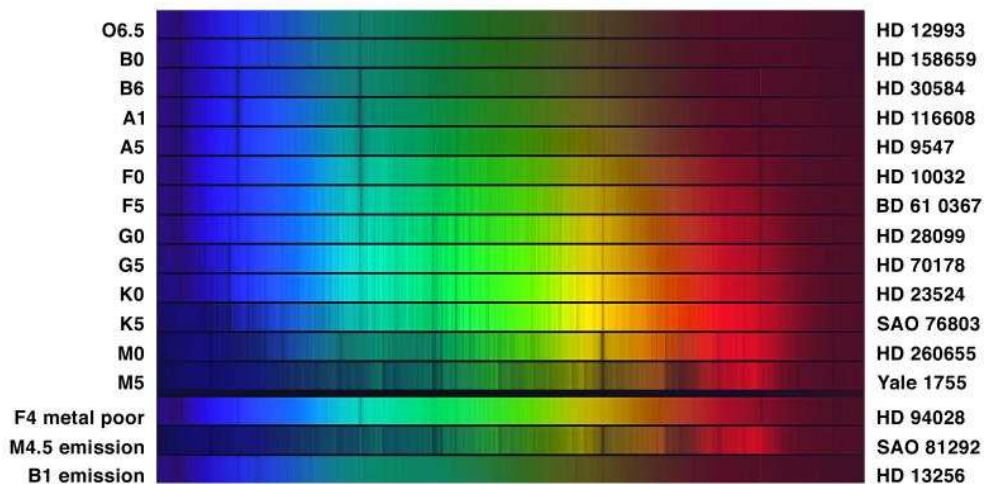


Рис. 1: Спектры звезд с различной эффективной температурой. Заимствовано с сайта ?????

Т.к. $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$, то линия $\lg L = 4 \lg T_{ef} + const$ - есть линия постоянного радиуса.

Интерферометрические измерения [32], выполненные в период с 1993 г. по 2009 г. на длине волны $\lambda = 11.15$ мкм, показали, что диаметр красного сверхгиганта Бетельгейзе за этот период уменьшился на 15 % – см. Рис. 5. Причина этого явления пока не понятна.

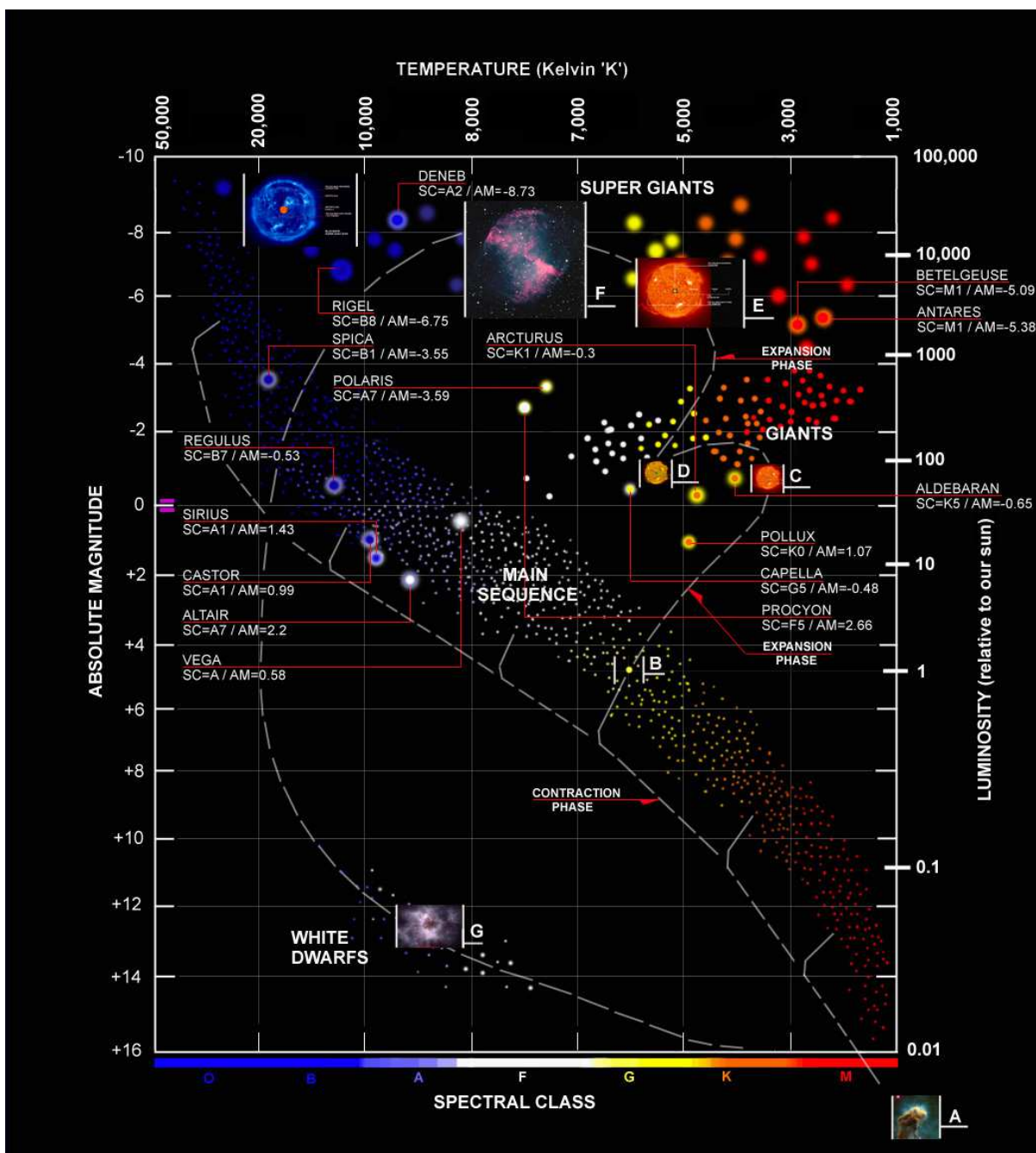


Рис. 2: Диаграмма Герцшпрунга-Рессела. Заимствовано с сайта ?????

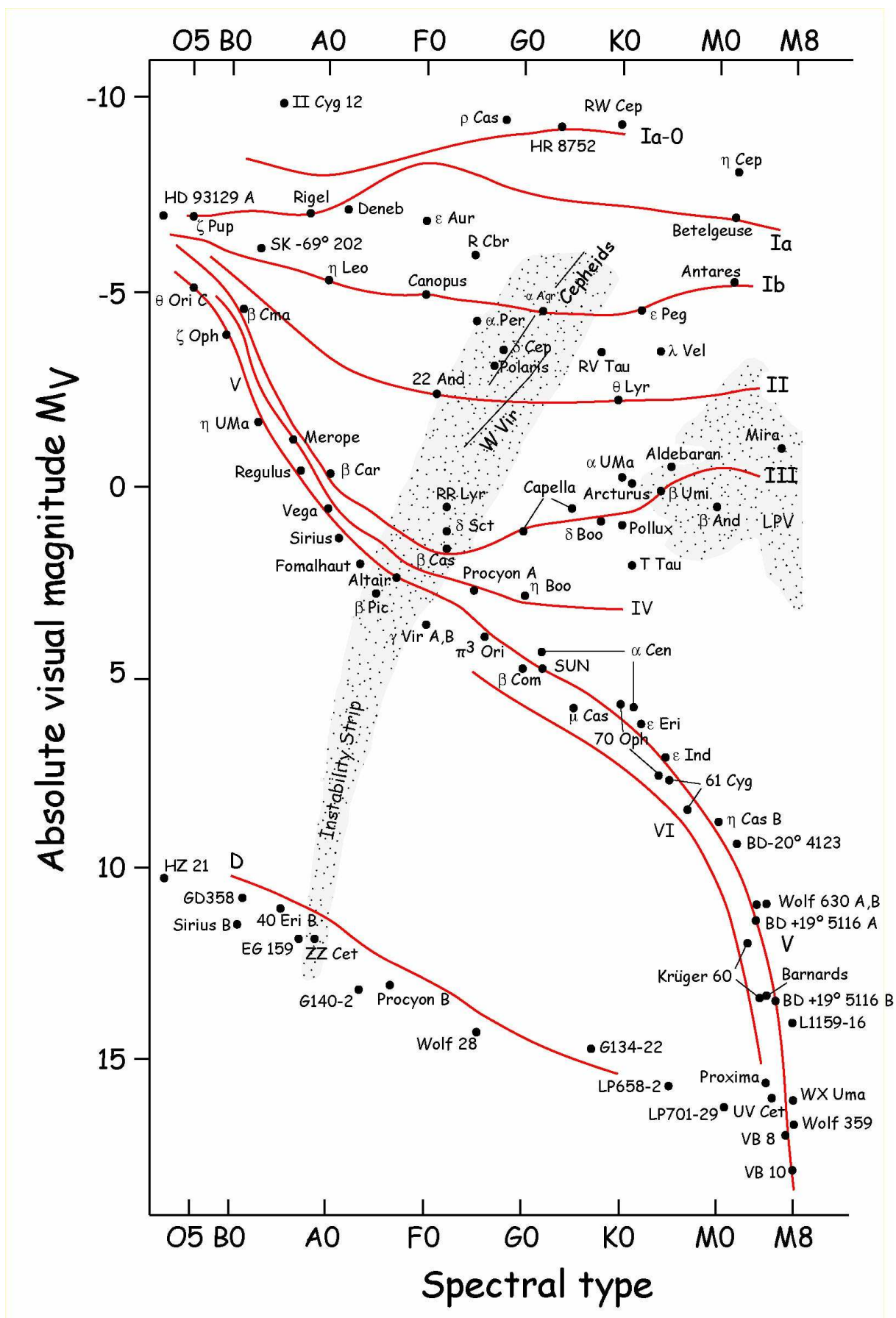


Рис. 3: Положение ярких звезд на диаграмме Герцшпрунга-Ресселя. Заимствовано с сайта ?????

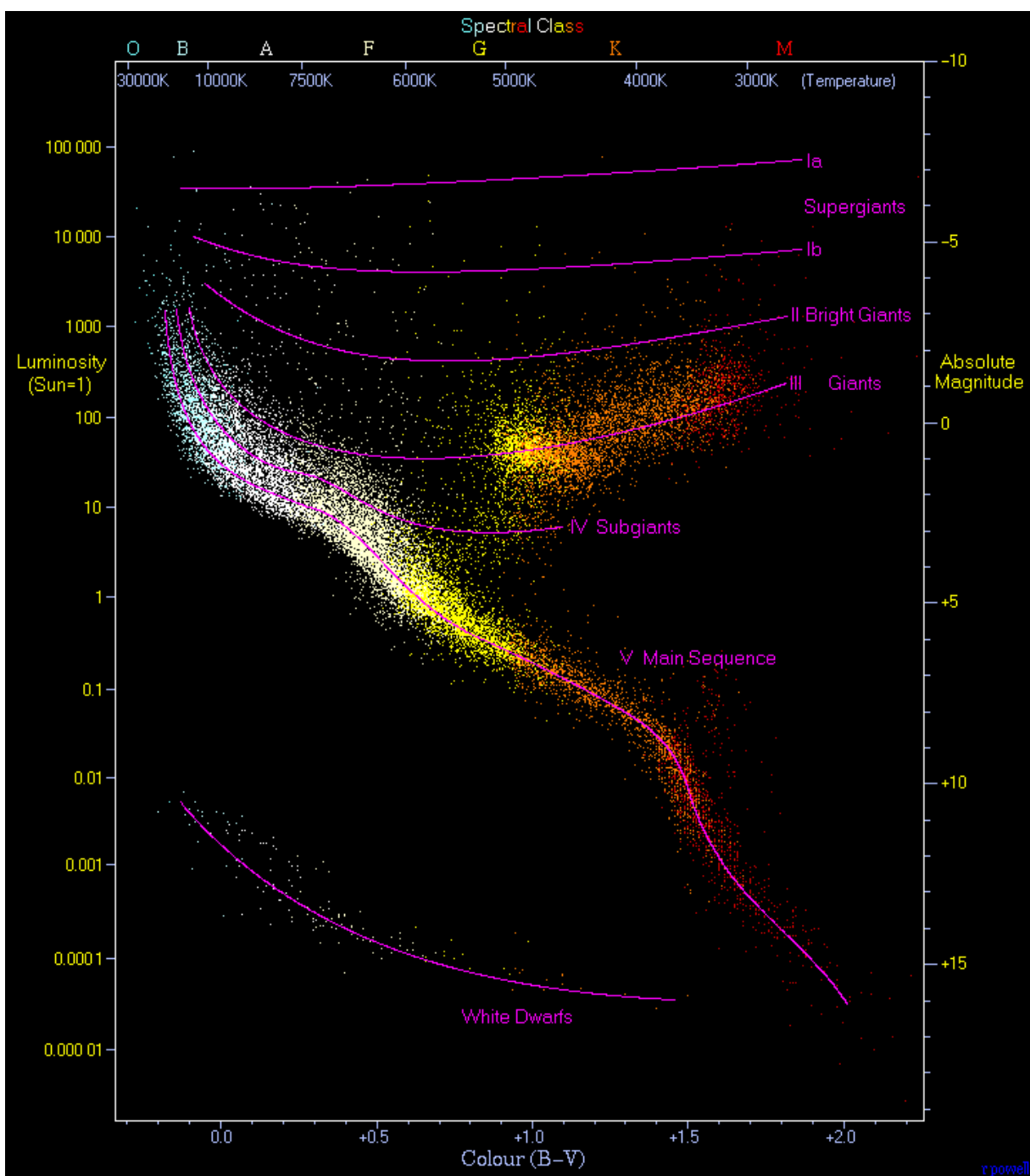


Рис. 4: Заимствовано из ?????

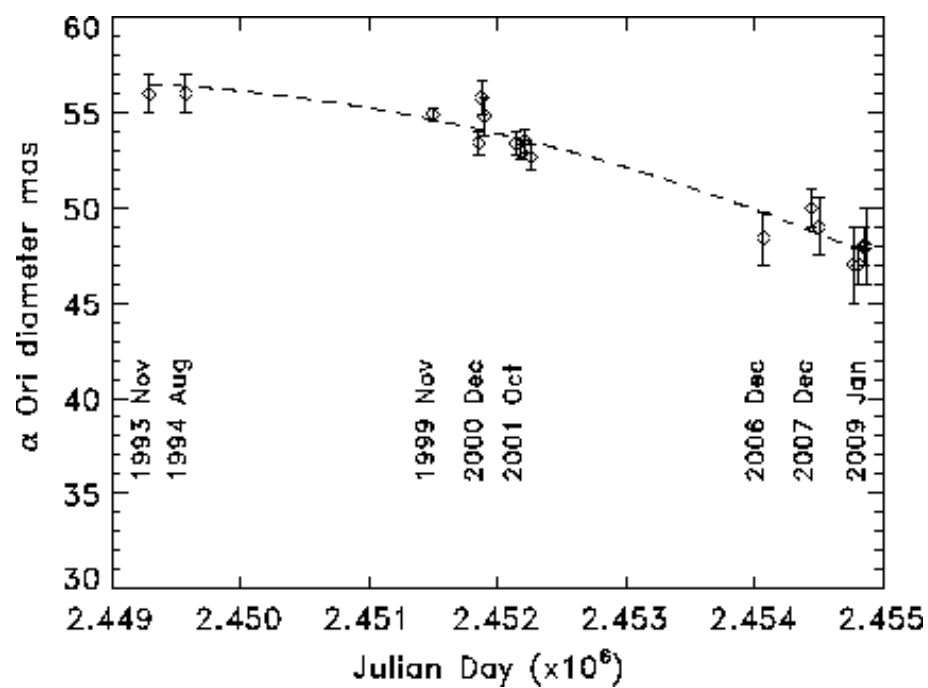


Рис. 5: Изменение радиуса красного сверхгиганта α Ori (Бетельгейзе) с течением времени.

Глава I

Механическое равновесие звезд

Звезда – небесное тело с $M \sim 0.1 - 100 M_{\odot}$.

Для двух протонов $F_{\text{кул}}/F_{\text{грав}} \sim 10^{39}$. Но по мере увеличения массы тел роль гравитации возрастает, т.к. тела в целом электронейтральны, а отрицательных масс не существует. У небесных тел с $R > 1000$ км связь частиц в единое целое происходит вследствие гравитационного взаимодействия – см. задачу I.1.

Таблица I.1: Сравнение характеристик электрического и гравитационного поля

Электрическое поле	Гравитационное поле	
Точечные заряды		
$\mathbf{F}_{q_oq} = q_oq/r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	$\mathbf{F}_{m_om} = -Gm_om/r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	Закон Кулона-Ньютона
$\mathbf{E} = q/r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	$\mathbf{g} = -Gm/r^2 \cdot (\mathbf{r}/r)$	Напряженность поля
$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$	$\mathbf{g} = \sum \mathbf{g}_i$	Аддитивность
$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \varphi_k = \sum_{i,i \neq k} q_i/r_{ik}$	$\mathbf{g} = -\nabla \varphi, \varphi_k = -\sum_{i,i \neq k} Gm_i/r_{ik}$	Потенциальность
Сплошная среда		
$\rho_q = dq/dV; \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_q$	$\rho = dm/dV; \operatorname{div} \mathbf{g} = 4\pi G\rho$	Источник поля
$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$	$\int \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Gm$	Теорема Гаусса
$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \varphi = \int \rho_q dV/r$	$\mathbf{g} = -\nabla \varphi, \varphi = -G \int \rho dV/r$	Потенциальность
$U = 0.5 \int \rho_q \varphi dV$	$U = 0.5 \int \rho \varphi dV$	Потенциальная энергия
$\Delta \varphi = -4\pi\rho_q$	$\Delta \varphi = 4\pi G\rho$	Уравнение Пуассона

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{2 \cdot \text{с}^2}.$$

I.1 Сферически симметричное поле

Пусть V – объем части звезды внутри некоторого радиуса r . Тогда $V = 4\pi r^3/3$, $dV = 4\pi r^2 dr$, и закон сохранения массы запишется в виде:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (\text{I.1})$$

В случае однородного шара, когда $\rho(r) = \text{const} = \rho_0$,

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0,$$

Это соотношение не применимо к реальным звездам в целом, однако оно справедливо в малой окрестности центра любой звезды, где, таким образом, $m \propto r^3$.

В дальнейшем строчные буквы r и m всегда будут использоваться для обозначения текущих значений радиуса и массы, а для радиуса и массы звезды в целом мы будем использовать прописные буквы R и M .

Пусть $\bar{\rho}(r) = m/V = 3m/4\pi r^3$ – среднее значение плотности вещества звезды внутри данного радиуса. По причинам, связанным с конвективной устойчивостью (см. Главу VIII), внутри звезды плотность не возрастает наружу, т.е. $d\rho/dr \leq 0$. Нетрудно видеть, что в такой ситуации

$$\bar{\rho}(r) \geq \rho(r), \quad (\text{I.2})$$

причем равенство имеет место лишь в том (нереалистическом) случае, когда $\rho(r) = \text{const}$. Отсюда следует, что в звезде и средняя плотность $\bar{\rho}(r)$ не возрастает наружу. Действительно, с учетом (I.1, I.2), имеем:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dr} = \frac{3}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \frac{dm}{dr} - \frac{3m}{r^4} \right] = \frac{3}{r} [\rho(r) - \bar{\rho}(r)] \leq 0, \quad (\text{I.3})$$

причем равенство имеет место, если $\rho(r) = \text{const}$.

Таким образом:

$$\frac{3m}{4\pi r^3} = \bar{\rho}(r) \geq \bar{\rho}(R) = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

откуда получается неравенство, которое в дальнейшем мы будем неоднократно использовать:

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{R} \left(\frac{M}{m} \right)^{1/3}. \quad (\text{I.4})$$

Напряженность гравитационного поля \mathbf{g} – это ускорение свободного падения, численно равное силе, действующей на тело единичной массы. В сферически симметричном случае вектор \mathbf{g} направлен по радиусу к центру звезды, т.е. образует с нормалью к внешней поверхности сферы угол 180° , косинус которого равен -1 . Тогда используя сферу с радиусом $r < R$ в качестве поверхности, через которую вычисляется поток напряженности, из теоремы Гаусса (см. Табл.I.1) получим: $-4\pi r^2 g = 4\pi Gm(r)$, т.е.

$$g = -\frac{Gm}{r^2}. \quad (\text{I.5})$$

Таким образом у сферически симметричной звезды напряженность поля на расстоянии r от центра определяется внутренними слоями и не зависит от вышележащих областей. Отсюда, в частности, следует, что в центре звезды $g = 0$ – результат очевидный из соображений симметрии, если трактовать g как силу, действующую на пробное тело единичной массы. К тому же результату можно придти, учитывая, что вблизи центра $m \propto r^3$:

$$g_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Gm}{r^2} = 0, \quad (I.6)$$

Если в теореме Гаусса в качестве внешней поверхности выбрать сферу с $r > R$, то получим, что напряженность гравитационного поля за пределами звезды такая же, как от точки с массой M :

$$g(r > R) = -\frac{GM}{r^2}.$$

Получим теперь выражение для гравитационного потенциала звезды, полагая, что он равен работе *внешних* сил по перемещению пробного тела единичной массы из данной точки пространства на бесконечность. Такое определение означает, что потенциал на бесконечности φ_∞ мы принимаем равным нулю. В сферически симметричном случае вектор $\nabla\varphi$ имеет только радиальную компоненту $d\varphi/dr$, поэтому общее выражение для φ из табл. I.1 сводится к

$$g \equiv g_r = -\frac{d\varphi}{dr} = \begin{cases} -Gm/r^2 & \text{при } r \leq R; \\ -GM/r^2 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (I.7)$$

Интегрируя это выражение получаем для области $r > R$:

$$\varphi = -\frac{GM}{r},$$

а для области $r \leq R$ (см. Задачу I.3):

$$\varphi(r) = -\int_r^\infty \frac{Gm}{r^2} dr = -\frac{Gm}{r} - \int_m^M \frac{Gdm}{r} < 0. \quad (I.8)$$

Нетрудно видеть, что зависимости $\varphi(r)$ для внутренних и внешних областей плавно переходят друг в друга при $r = R$.

Убедитесь самостоятельно, что для однородного шара общее выражение для потенциала принимает вид:

$$\varphi = \begin{cases} GM/2R \cdot (r^2/R^2 - 3) & \text{при } r \leq R; \\ -GM/r & \text{при } r > R. \end{cases}$$

В этом частном случае φ в центре (по модулю) в 1.5 раза меньше, чем на поверхности.

Используя общее выражение для гравитационной (потенциальной) энергии звезды из табл. I.1, получим (см. Задачу I.4):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{V_*} \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_0^M \varphi dm = -\int_0^M \frac{Gm}{r} dm < 0. \quad (I.9)$$

Последнее равенство показывает, что гравитационная энергия звезды – это работа, которую должны совершить внешние силы против сил тяготения (знак "минус" !), чтобы разрушить звезду, превратив ее в облако газа бесконечно большого размера. Действительно, если уничтожать звезду последовательно удаляя на бесконечность ее поверхностные сферические оболочки с массой dm , то работа по разрушению всей звезды должна быть равна последнему выражению в (I.9).

Это выражение можно записать в виде:

$$U = -\frac{GM^2}{R} \int_0^1 \left(\frac{m}{M}\right) \left(\frac{R}{r}\right) d\left(\frac{m}{M}\right) \equiv -k \cdot \frac{GM^2}{R}, \quad (\text{I.10})$$

где k – безразмерное число, величина которого определяется зависимостью $r/R = f(m/M)$, т.е. в конечном счете распределением плотности $\rho(r)$ внутри звезды. Чуть позднее мы убедимся, что в представляющих интерес случаях $k \sim 1$ и всегда ≥ 0.6 (см. Задачу I.9).

I.2 Механическое равновесие звезды

Сила тяготения стремится сжать звезду, а давление сжатого вещества этому препятствует. Баланс сил гравитации и давления обеспечивает механическое равновесие звезды, по сути дела, также как жидкости в сосуде. По этой причине соответствующее уравнение называют уравнением гидростатического равновесия, и выводится оно аналогичным образом – см. левую панель рис.I.1.

Мысленно выделим внутри звезды (на расстоянии r от ее центра) цилиндр с площадью основания dS и высотой dr так, чтобы его ось была направлена вдоль радиуса. Из соображений симметрии можно предполагать, что силы давления, действующие на боковые стенки цилиндра, взаимно уравниваются друг друга. Сила F_g , с которой цилиндр притягивается областью звезды, лежащей ниже него, равна

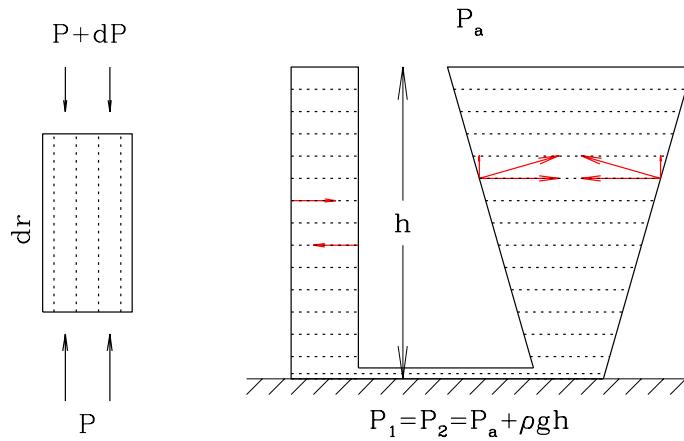


Рис. I.1: К выводу соотношения I.12 (левая панель) и иллюстрация, поясняющая причину т.н. гидростатического парадокса (правая панель).

$\rho dr dS \cdot g = -\rho dr dS \cdot Gm/r^2$ (притяжение выпележащих областей равно 0!). Разность сил давления (выталкивающая или архимедова сила F_a) направлена наружу и равна $P dS - (P + dP) dS = -dP dS$. Тогда второй закон Ньютона для цилиндра можно записать в виде: $d^2r/dt^2 = F_a + F_g$, откуда получаем

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2}. \quad (\text{I.11})$$

При равновесии $d^2r/dt^2 = 0$, поэтому искомое уравнение гидростатического равновесия имеет вид:

$$\frac{dP}{dr} = \rho g = -\rho \frac{Gm}{r^2}, \quad (\text{I.12})$$

причем, согласно (I.6),

$$\left(\frac{dP}{dr} \right)_{r=0} = 0. \quad (\text{I.13})$$

Может показаться, что при выводе (I.12) для сферически симметричной звезды правильной было бы элемент объема выбирать не цилиндрической формы, а в виде сегмента шара с основанием $dS = r d\theta \times r \sin \theta d\phi$ и протяженностью по радиусу dr , где r , θ и ϕ – сферические координаты элемента объема относительно центра звезды. В [2] приведены выкладки, показывающие, что и в этом случае получается соотношение (I.12). По сути дела, одинаковые результаты получаются по той же причине, по которой в сообщающихся сосудах цилиндрической и конической формы давление жидкости на дно сосуда одинаково и равно ρgh , если не учитывать атмосферное давление P_a . Суть этого явления, называемого гидростатическим парадоксом, в том, что в цилиндрическом сосуде сила давления жидкости на дно сосуда равна ее весу, а в расширяющемся кверху коническом сосуде (см. правую панель рис. I.1) меньше веса за счет вертикальной компоненты давления боковых стенок на жидкость. Полезно также отметить, что если в качестве элементарного объема выбрать не сферический сегмент, а сферическую оболочку, то вместо (I.12) получим неверный результат – см. задачу I.5.

Знак минус в (I.12) показывает, что давление газа $P(r)$ в звезде монотонно увеличивается с глубиной от нулевого значения на поверхности

$$P(R) = 0 \quad (\text{I.14})$$

до некоторого максимального значения P_0 в центре, компенсируя нарастающий вес выпележащих слоев.

Предположим, что из тех или иных соображений мы разделили звезду на две области: внутреннюю область ($0 \leq r \leq R_c$, $0 \leq m \leq M_c$) будем называть ядром (по английски – core), а выпележащие слои ($R_c \leq r \leq R$, $M_c \leq m \leq M$) – оболочкой. Из (I.12) с учетом (I.1) получаем, что давление в основании (bottom) оболочки равно:

$$P_b \equiv P(R_c) = \int_{R_c}^R \frac{\rho Gm}{r^2} dr = \int_{M_c}^M \frac{\rho Gm}{r^2} \left(\frac{dm}{dr} \right)^{-1} dm = \int_{M_c}^M \frac{Gm}{4\pi r^4} dm. \quad (\text{I.15})$$

Получим оценку величины P_b . С учетом неравенства (I.4) из (I.15) находим:

$$P_b \geq \int_{M_c}^M \frac{Gm}{4\pi R^4} \left(\frac{M}{m}\right)^{4/3} dm = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} \left[1 - \left(\frac{M_c}{M}\right)^{2/3}\right] \equiv P_b^{min}. \quad (\text{I.16})$$

Таким образом, давление в основании оболочки не может быть меньше некоторого минимального значения P_b^{min} , которое зависит от величин M_c , M и R . Этот результат будет использован в разделе XII.3.2 при обсуждении т.н. неустойчивости Шёнберга-Чандрасекара.

Впоследствии нам также понадобится записать условия гидростатического равновесия в форме:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad (\text{I.17})$$

которое получается из соотношения (I.7).

Отметим, что если звезда не является сферически симметричной, то уравнение движения и гидростатического равновесия будут иметь вид [7]:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \varphi, \quad \frac{\nabla P}{\rho} = -\nabla \varphi.$$

В этом общем случае вместо закона сохранения массы следует использовать уравнение Пуассона (см. табл.I.1):

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho.$$

I.3 Координаты Эйлера и Лагранжа при описании структуры звезды

В процессе эволюции у звезды меняется масса, структура и химический состав. С математической точки зрения это значит, что каждая из физических величин f , характеризующая строение звезды, зависит не только от пространственных координат $\vec{\mathbf{r}}$, но и от времени t . Впрочем, пока мы рассматриваем сферически симметричные звезды, нам достаточно одной пространственной координаты r , так что $f = f(r, t)$. В терминах механики сплошных сред такой подход к описанию структуры звезды следует называть методом Эйлера.

Однако часто вместо r в качестве независимой переменной бывает удобнее использовать массу m , величина которой (для разных слоев) меняется в интервале от 0 до M_* . При таком подходе $f = f(m, t)$. Следуя терминологии механики сплошных сред переменную m будем называть лагранжевой координатой, хотя, как отмечено в [7] на стр.19, такое название не совсем корректно.

При фиксированном t переход от эйлеровых координат к лагранжевым осуществляется тривиально:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_t \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial m}\right)_t.$$

Подставив в это соотношение вместо f величину m и используя равенство (I.1) получим выражение для закона сохранения массы в лагранжевых координатах:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial m}\right)_t = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \quad (\text{I.18})$$

что позволяет переписать исходное соотношение в окончательной форме:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)_t = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_t. \quad (\text{I.19})$$

В частности, заменив f на P , из соотношения (I.12) получаем уравнение гидростатического равновесия в лагранжевых переменных:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)_t = -\frac{Gm}{4\pi r^4}. \quad (\text{I.20})$$

Получим теперь соотношение, связывающее производные $(\partial f/\partial t)_r$ и $(\partial f/\partial t)_m$. Запишем одно и то же приращение величины f сначала в эйлеровых, а затем в лагранжевых координатах:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_r dt + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_t dr = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_m dt + \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)_t dm.$$

Положив в этом соотношении $dm = 0$, т.е. приняв $m = \text{const}$, получим искомую связь:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_m = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_r + v \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_t. \quad (\text{I.21})$$

Здесь $v \equiv (\partial r/\partial t)_m$ — это скорость движения внешней границы области с массой m . Отметим, что при расширении области $v > 0$, а при сжатии $v < 0$.

Уравнение движения (I.11), написанное нами в лагранжевых переменных, в эйлеровых переменных примет вид:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_r + v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_t = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2}. \quad (\text{I.22})$$

Выведем теперь пару соотношений, которые нам понадобятся в будущем. Сначала выберем в качестве f величину m . Поскольку $(\partial m/\partial t)_m = 0$, то используя (I.18) получим:

$$\dot{m} \equiv \left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_r = -4\pi r^2 \rho v. \quad (\text{I.23})$$

Наличие знака "минус" в выражении для потока массы \dot{m} через внешнюю границу области естественно: масса области увеличивается, когда вещество втекает в область через ее внешнюю границу ($v < 0$), и уменьшается, когда вещество через эту границу движется наружу ($v > 0$).

Второе интересующее нас соотношение относится к ситуациям, в которых изменение величины f на данном радиусе происходит очень медленно, что позволяет пренебречь величиной $(\partial f/\partial t)_r$ в (I.21) по сравнению с другими членами. Учитывая (I.23) в этом случае т.н. квазистационарной эволюции имеем:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_m \approx -\dot{m} \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)_r. \quad (\text{I.24})$$

I.4 Теорема вириала

Домножая обе части уравнения гидростатического равновесия (I.12) на $4\pi r^3$ и интегрируя левую часть получившегося равенства по частям получим соотношение, называемое теоремой вириала:

$$4\pi r^3 P(r) - 3 \int_0^r P \cdot 4\pi r^2 dr = - \int_0^m \frac{Gm}{r} dm. \quad (\text{I.25})$$

Для звезды в целом, с учетом $P(R) = 0$ и выражения (I.9) для гравитационной энергии U , теорема вириала приобретает вид:

$$U = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm. \quad (\text{I.26})$$

Рассмотрим звезды, которые состоят из полностью ионизованного идеального газа. В главе III будет показано, что тепловая энергия одного грамма такого газа $E = 3P/2\rho$, а зависимость давления от плотности и температуры T описывается уравнением Клайперона-Менделеева:

$$P = \frac{\rho \Re T}{\mu},$$

где $\Re \approx 8.31 \cdot 10^7$ эрг/г/К – универсальная газовая постоянная, а молекулярный вес μ – величина, которая зависит от химического состава газа и для звезд типа Солнца ≈ 0.6 .

Подставляя выражение для E в (I.26) получим, что в рассматриваемом случае тепловая энергия всей звезды Q и ее гравитационная энергия примерно равны друг другу:

$$U = -2 \int_0^M E dm = -2Q, \quad \text{или} \quad Q = -\frac{U}{2}. \quad (\text{I.27})$$

Таким образом полная энергия звезды, состоящей из идеального ионизованного газа,

$$W = U + Q = U/2 \quad (\text{I.28})$$

отрицательна. С другой стороны, полная энергия W холодного облака конечной массы и бесконечно большого размера, очевидно, равна нулю, а если облако разлетается, то $W > 0$ за счет кинетической энергии. Следовательно, чтобы превратить звезду в облако разлетающегося газа, нужно добавить звезде энергию не менее $|U|/2$. Разрушить звезду могут либо внешние силы, например, приливное воздействие звезды-спутника, либо выделение достаточно большого количества термоядерной энергии внутри самой звезды.

Теорема вириала (I.26) позволяет получить оценку средней температуры таких звезд, полагая, что $\mu(m) = \text{const}$ и используя тот факт, что $-U \geq 3GM^2/5R$ (см.

Задачу I.9):

$$\bar{T} \equiv \frac{1}{M} \int_0^M T \, dm \approx \frac{\mu}{M\mathfrak{R}} \int_0^M \frac{P}{\rho} \, dm = -\frac{\mu}{M\mathfrak{R}} \frac{U}{3} \geq \frac{GM\mu}{5R\mathfrak{R}}. \quad (\text{I.29})$$

Средняя температура Солнца ($M_\odot = 1.99 \cdot 10^{33}$ г, $R_\odot = 6.96 \cdot 10^{10}$ см), например, получается $> 2 \cdot 10^6$ К. При такой температуре водород и гелий, из которых, в основном, состоят звезды, ионизованы практически полностью, что, по крайней мере, не противоречит возможности применять исходные предположения в данном случае.

По той или иной причине у звезды в процессе эволюции бывают периоды, когда мощность термоядерного энерговыделения в ее центральных областях много меньше светимости звезды L , т.е. количества энергии, излучаемой в единицу времени с поверхности звезды в окружающее пространство. На этих этапах эволюции полная энергия звезды W должна уменьшаться, поэтому

$$-L = \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_0^M \frac{Gm}{2r} \, dm = \int_0^M \left(\frac{dr}{dt} \right)_m \cdot \frac{Gm}{2r^2} \, dm = \overline{\left(\frac{dr}{dt} \right)_m} \cdot \int_0^M \frac{Gm}{2r^2} \, dm. \quad (\text{I.30})$$

Из этого соотношения следует, что излучение энергии с поверхности звезды, не скомпенсированное выделением ядерной энергии, приводит к изменению зависимости $r = r(m)$ с течением времени, т.е. к перестройке структуры звезды, причем, в среднем, звезда сжимается, поскольку $\overline{(dr/dt)_m} < 0$.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации излучается энергия, которая выделяется в результате работы сил тяготения при сжатии звезды. Согласно (I.30), при этом величина $-U$ возрастает, однако излучение уносит только половину запасаемой потенциальной энергии ($L \, dt = -dU/2$), а вторая половина идет на увеличение тепловой энергии звезды, что также видно из соотношения (I.27), если записать его в виде $dQ = -dU/2$. Действительно, в процессе сжатия возрастает не только средняя плотность, но и средняя температура вещества звезды – это следует из того, что, согласно (I.29), $\bar{T} \propto -U$. Получается, что теряя энергию, звезда не охлаждается, а нагревается! Столь нетривиальное поведение звезды заслуживает более подробного анализа, который мы отложим до раздела XI.2.

Подчеркнем, что вириальные соотношения (I.25), (I.26) не зависят от уравнения состояния вещества звезды, т.е. от конкретного вида зависимости $E = E(\rho, T)$ и $P = P(\rho, T)$, однако все последующие количественные выводы этого раздела получены для звезд, которые состоят из идеального ионизованного газа. Впоследствии мы увидим, что если рассматривать вещество с другим уравнением состояния, то в большинстве случаев полученные соотношения изменятся только количественно, однако в ряде важных случаев некоторые выводы могут качественно измениться: например, излучение с поверхности белых карликов и нейтронных звезд приводит не к нагреву, а охлаждению внутренних областей этих объектов.

I.5 Временные шкалы основных процессов в звезде

Механическое равновесие звезды – результат баланса сил тяготения и давления вещества, сжатого весом вышележащих слоев. Сила тяготения в каждой точке может быть найдена, если известна зависимость $\rho(r)$, но чтобы определить давление в данной точке кроме плотности нужно знать также температуру и химический состав вещества. Градиент температуры внутри звезды обеспечивает перенос тепла от более горячих слоев к более холодным и, в конечном итоге, к поверхности звезды: позднее мы увидим, что поток тепла пропорционален градиенту температуры, а коэффициент пропорциональности – сложная функция ρ , T и химического состава газа. В свою очередь, поток тепла внутри звезды и светимость на ее поверхности должны согласоваться с мощностью источников энерговыделения внутри звезды – работы гравитационной силы и термоядерных реакций, интенсивность протекания которых также зависит от плотности, температуры и химического состава вещества.¹

Если у звезды нет близкого спутника, то изменение ее внутреннего строения с течением времени, в конечном счете, происходит из-за того, что звезда излучает энергию в окружающее пространство. На эволюцию структуры звезды также сказывается изменение химического состава вещества, обусловленное термоядерными реакциями, перемешиванием в конвективных зонах и процессом диффузии в областях, где конвекции нет. Наконец, весьма важную роль играет уменьшение массы звезды в процессе эволюции, вызванное истечением вещества внешних слоев в окружающее пространство, причем скорость потери массы $\dot{M} = dM/dt$ меняется с течением времени в зависимости от изменения интегральных параметров звезды, включая химический состав на поверхности.

Таким образом, строение и эволюция звезды определяются рядом процессов, главные из которых – сохранение механического равновесия звезды, перенос тепла в ее внутренних слоях, расход запасов ядерного топлива и изменение массы. Важный и весьма полезный параметр каждого процесса – характерное время его протекания. В частности, сравнение характерных времен разных процессов с продолжительностью того или иного явления в жизни звезды часто позволяет понять его причину и физическую сущность. Сейчас мы получим оценку характерного времени протекания главных для звезды процессов, начав с процесса установления механического равновесия.

Если внезапно исчезнет градиент давления, внешние области звезды начнут свободно падать (free fall) к ее центру с ускорением $g = GM/R^2$. Чтобы пройти расстояние порядка R внешним слоям необходимо время

$$t_{ff} \sim \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi G\bar{\rho}}},$$

где $\bar{\rho}$ – средняя плотность звезды.

По мере сжатия звезды ускорение свободного падения на поверхности будет увеличиваться, поэтому полученное соотношение завышает величину t_{ff} . Однако есте-

¹Для полноты картины можно отметить, что вращение звезды и ее магнитное поле также могут быть весьма важны, особенно на заключительных этапах эволюции массивных звезд, однако сейчас мы эти факторы рассматривать не будем.

ственно ожидать, что значительная доля общего времени сжатия придется на первоначальный разгон вещества, который должен неплохо описываться формулой равноускоренного движения. Так оно и есть: точный расчет времени t_{ff} дает значение (I.47), отличное от нашей оценки всего на 30 % (см. Задачу I.10).

К оценке времени установления гидростатического равновесия можно подойти с другой стороны. Малые возмущения давления распространяются в веществе со скоростью звука V_s . Поэтому если равновесное распределение давления в звезде по какой-либо причине нарушится, то чтобы его восстановить потребуется время t_{hyd} , за которое звуковая волна пройдет расстояние $\sim R$, следовательно $t_{hyd} \sim R/V_s$. В случае полностью ионизованного идеального газа [7]:

$$V_s = \left(\frac{5P}{3\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{5\mathcal{R}T}{3\mu} \right)^{1/2}.$$

С учетом выражения (I.29) для средней температуры внутри звезды, состоящей из такого газа, получаем:

$$\bar{V}_s \approx \left(-\frac{5U}{9M} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{5GM}{9R} \right)^{1/2} \Rightarrow t_{hyd} \sim \left(\frac{9R^3}{5GM} \right)^{1/2} = \left(\frac{27}{20\pi G\bar{\rho}} \right)^{1/2}$$

Выражения для t_{ff} и t_{hyd} практически совпадают из-за того, что гравитационная и тепловая энергия звезды имеют примерно одинаковую абсолютную величину (но разные знаки). Впредь характерное время установления гидростатического равновесия мы будем называть гидродинамическим временем и использовать для него оценку

$$t_{hyd} \sim \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}. \quad (\text{I.31})$$

В качестве оценки времени, характеризующего процесс переноса тепла в звезде (тепловое время), примем величину

$$t_{th} \sim \frac{Q}{L}, \quad (\text{I.32})$$

которая показывает за какое время высветится весь запас тепловой энергии звезды. В случае звезд, которые состоят из идеального газа, $Q \sim -U$, поэтому для них можно написать: $t_{th} \sim GM^2/RL$.

Время, за которое исчерпываются запасы ядерного топлива t_{nuc} , можно оценить из следующих соображений. Обозначим через q энергию (количество теплоты), которая выделяется в процессе превращения одного грамма элемента A в элемент B – аналог удельной теплоты сгорания химического топлива. Пусть ζ – доля массы звезды, в которой на рассматриваемом этапе эволюции происходит ядерная реакция $A \rightarrow B$. Тогда т.н. ядерное время, характеризующее продолжительность этого этапа,

$$t_{nuc} \sim \frac{q\zeta M}{L}. \quad (\text{I.33})$$

Отметим, что, по сути дела, величины t_{th} и t_{nuc} определяются из соотношений, аналогичных оценке времени, за которое опустеет бассейн известного объема, если из него ежесекундно выливается L литров воды.

Аналогичным образом (запас, деленный на ежесекундный расход) естественно определить и характерное время изменения массы звезды, обусловленное звездным ветром (wind):

$$t_w \sim \frac{M}{\dot{M}}.$$

В качестве примера оценим характерные времена для Солнца на стадии главной последовательности, т.е. в тот период, когда его светимость поддерживается превращением водорода в гелий. На этом этапе $L_\odot \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/с, $\dot{M} \approx 10^{-14}$ M_\odot /год, $\zeta \sim 0.1$. Учтем также, что согласно Табл. V.2, $q_{H \rightarrow He} \approx 8 \cdot 10^{18}$ эрг/г. Соответственно имеем:

$$t_{hyd} \sim 30 \text{ мин}, \quad t_{th} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ лет}, \quad t_{nuc} \sim 10^{10} \text{ лет}, \quad t_w \sim 10^{14} \text{ лет}.$$

Таким образом для Солнца в целом $t_{hyd} \ll t_{th} \ll t_{nuc} \ll t_w$. В дальнейшем мы убедимся, что если рассматривать любую звезду как единое целое, то всегда $t_{hyd} \ll t_{th}$, а t_{th} может быть как много меньше t_{nuc} , так и сравнимо с ним.

Это значит, что внутреннее строение звезд определяется, главным образом, условием гидростатического равновесия, и свойства звезд в первом приближении можно понять без анализа их термической структуры и источников энерговыделения.

У звезд с массой близкой к солнечной на главной последовательности $t_w \gg t_{nuc}$, но становится $\sim t_{nuc}$, когда они превращаются в красных гигантов, а у массивных звезд всегда $t_w \sim t_{nuc}$. Иными словами, изменение массы играет важную роль для звезд похожих на Солнце только в конце их жизненного пути, а для массивных звезд потеря массы важна на всех стадиях эволюции.

Наконец, из условия $t_{hyd} \ll t_{th}$ можно сделать вывод о том, что если в звезде возникают малые отклонения от гидростатического равновесия, то последующую перестройку структуры звезды можно в первом приближении рассматривать без учета изменения теплового баланса. Иными словами, малые возмущения механической структуры можно в первом приближении рассматривать как адиабатические.

I.6 Показатель адиабаты γ

В Главе III будет рассмотрен вопрос о термодинамических свойствах вещества, из которого состоят звезды. Но еще до этого нам придется использовать т.н. показатель адиабаты γ , который характеризует свойства вещества при адиабатическом процессе, поэтому мы вкратце напомним, что это за параметр. Для простоты в этом разделе мы будем полагать, что химический состав вещества, характеризуемый относительным содержанием различных элементов X , всегда одинаков.

Как известно, адиабатическим называется процесс, в ходе которого не меняется энтропия S рассматриваемой системы, т.е. $S(t) = const$. В ходе этого процесса давление и плотность вещества связаны соотношением:

$$\frac{P(t)}{P_0} = \left[\frac{\rho(t)}{\rho_0} \right]^\gamma \quad \text{или} \quad P = K_0 \rho^\gamma, \quad \text{где} \quad K_0 = P_0 / \rho_0^\gamma = const, \quad (I.34)$$

в котором величина γ называется показателем адиабаты: чем больше эта величина, тем быстрее растет (падает) давление при увеличении (уменьшении) плотности.

Рассмотрим простейший случай, когда можно считать, что внутренняя энергия одного грамма вещества E стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$, а $\gamma = \text{const}$. Тогда из второго закона термодинамики, записанного для 1 грамма вещества, имеем:

$$T dS = 0 = dE + P d\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

откуда получаем:

$$E = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \quad \text{эрг/г.} \quad (\text{I.35})$$

Поскольку удельная тепловая энергия – величина положительная, из этого выражения следует, что нас будет интересовать лишь случай, когда $\gamma > 1$.

Пусть γ – средний по звезде показатель адиабаты, т.е. постоянная величина. В этом простейшем случае теорема вириала примет вид:

$$U = -3(\gamma - 1) \int_0^M E dm = -3(\gamma - 1)Q. \quad (\text{I.36})$$

Например, для полностью ионизованного газа $\gamma = 5/3$ (см. Главу III), поэтому у звезд, которые состоят из такого вещества, должно выполняться условие: $U = -2Q$, т.е.

$$Q = -U/2. \quad (\text{I.37})$$

I.7 Необходимое условие устойчивости звезд

Рассмотрим звезду, которая находится в состоянии гидростатического равновесия и предположим, что вещество, из которого она состоит, характеризуется постоянным показателем адиабаты γ . Будет ли такое равновесие устойчивым? При каких условиях малые возмущения структуры звезды, возникшие по той или иной причине, приведут к необратимому нарушению механического равновесия? Вообще говоря, вопрос этот является весьма сложным, однако одно весьма общее необходимое условие устойчивости можно получить довольно просто.

Для описания структуры звезды используем подход Лагранжа, в рамках которого текущие значения радиуса r , плотности газа ρ и его давление P рассматриваются как функции массы m ($0 \leq m \leq M$). Для исходного состояния звезды $r = r_e(m)$, $\rho = \rho_e(m)$ и $P = P_e(m)$, где индекс e подчеркивает то обстоятельство, что звезда находится в механическом равновесии (по английски equilibrium).

Предположим, что в исходной структуре звезды по той или иной причине возникли т.н. гомологические возмущения, т.е. звезда расширилась (или сжалась) так, что радиус каждой ее точки увеличился (уменьшился) в одинаковой степени:

$$r(m) = \xi r_e(m), \quad \text{где} \quad \xi(m) = \text{const}. \quad (\text{I.38})$$

Дополнительно предположим, что эти возмущения являются адиабатическими, т.е. расширение или сжатие звезды происходит так, что

$$P(m) = P_e(m) \cdot \left[\frac{\rho(m)}{\rho_e(m)} \right]^\gamma. \quad (\text{I.39})$$

Рассмотрим теперь совокупность гомологичных газовых шаров, каждый из которых характеризуется параметром $\xi > 0$, и выясним, как в зависимости от величины ξ будут меняться силы, которые обеспечивают механическое равновесие звезды.

Из закона сохранения массы следует, что при гомологичном изменении размеров каждого слоя звезды плотность в каждой точке должна измениться в ξ^3 раз, т.е.

$$\rho(m) = \frac{\rho_e(m)}{\xi^3}. \quad (\text{I.40})$$

Действительно, для исходной конфигурации имеем $dr_e/dm = 1/4\pi\rho_e r_e^2$, а для возмущенной:

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \implies \xi \frac{dr_e}{dm} = \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{1}{4\pi r_e^2 \rho} \implies \frac{\xi}{\rho_e} = \frac{1}{\xi^2 \rho},$$

откуда и следует соотношение (I.40).

Тогда из (I.39) и (I.40) следует, что

$$P(m) = \frac{P_e(m)}{\xi^{3\gamma}}. \quad (\text{I.41})$$

Градиент давления, т.е. выталкивающая (архимедова) сила F_a , действующая на 1 см^3 вещества, измениться в возмущенной звезде по сравнению с исходной в $\xi^{3\gamma+1}$ раз:

$$F_a \equiv \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\xi^{3\gamma}} \frac{dP_e}{dr} = \frac{1}{\xi^{3\gamma+1}} \left(\frac{dP}{dr} \right)_e \equiv \frac{F_a^e}{\xi^{3\gamma+1}}. \quad (\text{I.42})$$

С другой стороны, сила притяжения 1 см^3 вещества нижележащими слоями F_{grav} должна измениться в ξ^5 раз, поскольку

$$F_{grav} = \frac{\rho G m}{r^2} = \frac{1}{\xi^5} \frac{\rho_e G m}{r_e^2} = \frac{F_{grav}^e}{\xi^5}. \quad (\text{I.43})$$

Первоначально звезда находилась в механическом равновесии ($F_a/F_{grav} = 1$), но после гомологического расширения (сжатия)

$$\frac{F_a}{F_{grav}} = \xi^{4-3\gamma}. \quad (\text{I.44})$$

Если $\gamma > 4/3$, то показатель степени в правой части этого соотношения < 0 . Следовательно при расширении звезды ($\xi > 1$) сила тяготения станет больше архимедовой, что заставит звезду сжиматься, т.е. возвращаться к исходному (равновесному) состоянию, а при сжатии ($\xi < 1$) архимедова сила, наоборот, станет больше силы тяготения, и звезда будет вынуждена расширяться, т.е. опять-таки, вернется к исходному невозмущенному состоянию.

Если $\gamma < 4/3$, то аналогичные рассуждения показывают, что баланс сил будет таков, что первоначальное расширение или сжатие будут продолжаться, т.е. звезда еще больше будет отклоняться от исходной, равновесной конфигурации. Таким образом мы показали, что для устойчивости механического равновесия звезды необходимо, чтобы упругость вещества, из которого она состоит, была достаточно велика. Количественным выражением необходимого условия устойчивости является неравенство:

$$\gamma > 4/3. \quad (\text{I.45})$$

Подчеркнем, что это условие устойчивости является необходимым, но отнюдь не достаточным, поскольку мы рассматривали устойчивость лишь относительно одного, специального типа возмущений (адиабатически-гомологичных).

При выводе критерия неустойчивости предполагалось, что величина γ одинакова во всех областях звезды. В реальной ситуации звезда теряет устойчивость, когда γ становится $< 4/3$ в области с массой более 10-20 % M_* . Именно это обстоятельство приводит к гибели достаточно массивных звезд и феномену сверхновых. Позднее мы обсудим причины, вследствие которых γ может стать $< 4/3$.

Задачи

Задача I.1. Оцените, при каких размерах небесных тел гравитация заметным образом влияет на их внутреннее состояние.

Задача I.2. Определите максимальную высоту h гор на планетах, а также отношение h/R , где R – радиус планеты. Считать, что планета не вращается вокруг оси.

Задача I.3. Получите соотношение (I.8):

$$\varphi(r) = -\frac{Gm}{r} - \int_m^M \frac{Gdm}{r}.$$

Задача I.4. Покажите, что

$$I_1 \equiv \int_0^M \varphi dm = -2 \int_0^M \frac{Gm}{r} dm,$$

т.е. докажете справедливость одного из равенств в соотношении (I.9).

Задача I.5. Покажите, что если при выводе уравнения гидростатического равновесия в качестве элемента объема выбрать сферическую оболочку, то соотношение (I.12) получить не удастся. Почему?

Задача I.6. Показать, что

$$P(r) \geq \frac{3GM^2}{8\pi R^4} - \frac{3Gm^2}{8\pi r^4}. \quad (\text{I.46})$$

Указание: с помощью соотношений (I.1), (I.12) и (I.2) определить знак производной функции $f \equiv P + 3Gm^2/8\pi r^4$.

Задача I.7. Примем, что среднее значение давления P_a земной атмосферы на уровне моря равно $h_0 = 760$ мм ртутного столба, радиус Земли $R_\oplus = 6400$ км, а плотность ртути $\rho_{Hg} \approx 13.6$ г/см³. Оцените массу земной атмосферы.

Задача I.8. Используя соотношение (I.16) найти нижний предел давления в центре Солнца P_0 .

Задача I.9. Используя неравенство (I.4) показать, что

$$U \leq -\frac{3GM^2}{5R}.$$

Задача I.10. Показать, что время t_{ff} , за которое сожмется звезда, если "выключить" противодействующее гравитации давление,

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}}} \quad (\text{I.47})$$

где $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$ – средняя плотность вещества звезды.

Задача I.11. Получить необходимое условие устойчивости (I.45) из энергетических соображений.

Задача I.12. Показать, что при гомологичном сжатии или расширении звезды относительная скорость изменения радиуса одинакова для всех слоев, т.е.

$$\frac{\dot{r}}{r} = \text{const}(m). \quad (\text{I.48})$$

Задача I.13. Показать, что при гомологичном сжатии или расширении звезды, *при условии сохранения гидростатического равновесия*, относительные скорости изменения плотности и давления одинаковы во всех слоях и связаны соотношением:

$$\frac{\dot{\rho}}{3\rho} = \frac{\dot{P}}{4P} = -\frac{\dot{r}}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{\dot{P}}{P} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (\text{I.49})$$

Глава II

Политропные звезды

На данный момент для описания структуры звезды мы имеем два дифференциальных уравнения, выражающих закон сохранения массы (I.1) и условие гидростатического равновесия (I.12), для трех неизвестных функций радиуса: $P(r)$, $\rho(r)$ и $m(r)$. Следовательно, система не замкнута и решить поставленную задачу пока невозможно.

Дополнительные уравнения, которые позволят замкнуть систему, будут выведены в последующих главах. Однако желательно уже сейчас получить предварительное количественное представление о внутреннем строении и характере эволюции звезд. Это можно сделать, поскольку в разделе I.5 мы пришли к выводу, что основа существования звезды – гидростатически равновесная структура с соответствующим распределением $P(r)$, $\rho(r)$ и $m(r)$. Поэтому на время мы отложим рассмотрение тепловых процессов и замкнем систему уравнений, введя некоторую модельную зависимость $P(\rho)$, что позволит сделать задачу корректной с точки зрения математики.

Впервые такой подход был предложен еще во второй половине XIX века в работах Лэна (J. Lane), лорда Кельвина (W.Thomson), Риттера (A.Ritter) и Эмдена (R.Emden), когда практически ничего не было известно об источниках энергии, механизме переноса тепла и свойствах вещества звезд – исторический аспект подробно описан в книге Чандрасекара [12]. В рамках этого подхода реальная зависимость $P = P(\rho)$ вдоль радиуса звезды аппроксимируется степенной функцией. Иными словами мы будем предполагать, что

$$P(r) = K \cdot [\rho(r)]^{1+1/n} \quad \text{или} \quad \log P = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log \rho + \text{const.} \quad (\text{II.1})$$

Если величину K выразить через плотность и давление в центре звезды

$$K = P_0 \rho_0^{-(1+1/n)}, \quad (\text{II.2})$$

то политропную зависимость можно записать в виде:

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1+1/n}. \quad (\text{II.3})$$

Показатель степени n принято называть индексом политропы, а зависимость (II.1) – политропной, или просто политропой. Как видно из Рис.II.1, политропа с ин-

дексом $n \approx 2.5$ неплохо аппроксимирует реальную зависимость $P(\rho)$ в случае Солнца. Еще раз укажем, что речь идет о том, как связаны изменения величин P и ρ *вдоль радиуса звезды* – никаких дополнительных предположений о термодинамических свойствах вещества, характеризующихся, в частности, показателем адиабаты, не делается!

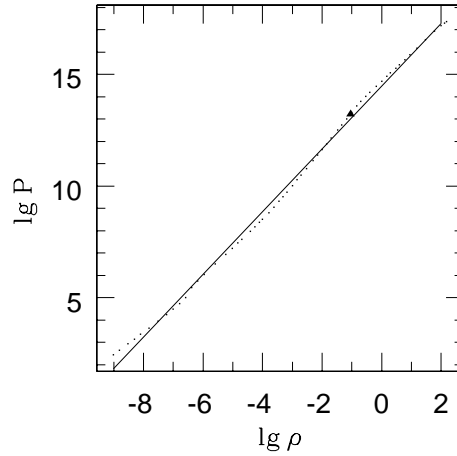


Рис. II.1: Аппроксимация истинной зависимости $P(\rho)$ для Солнца (пунктирная линия) законом (II.1) с $n \approx 2.5$ (сплошная линия). Треугольником отмечена точка, в которой $m = 0.99 M_{\odot}$, $r = 0.80 R_{\odot}$.

Если переписать (II.1) в виде:

$$\rho = \left(\frac{P}{K} \right)^{n/n+1}, \quad (\text{II.4})$$

то становится ясно, что при $-1 \leq n < 0$, плотность газа в звезде должна возрастать от центра к краю, что вдоль всей звезды невозможно из-за возникновения конвекции – см. Главу VIII. Случай $n < -1$ также не представляет интереса в физике звезд. В частности, если звезда состоит из "обычного" газа, подчиняющегося уравнению Клайперона-Менделеева, (см. Главу III), то при $n < -1$ температура газа T , пропорциональная отношению P/ρ , будет возрастать от центра к краю, что никогда не реализуется внутри всей звезды, хотя при наличии интенсивного нейтринного излучения такое возможно в некоторой ее части.

По этим причинам в дальнейшем мы будем рассматривать лишь политропные звезды с индексом $n \geq 0$, у которых на внешней границе звезды в ноль обращается не только давление, но и плотность, т.е.

$$\rho(R) = 0. \quad (\text{II.5})$$

Из определения (II.1) следует, что с формальной точки зрения индекс политропы не может быть равным нулю. Но из (II.4) видно, что случай $n = 0$ соответствует ситуации, когда изменение давления в веществе не приводит к изменению его плотности.

Иными словами, случай $n = 0$ описывает несжимаемую жидкость: $\rho(r) = \rho_0 = \text{const}$, где ρ_0 – центральная плотность.

Полагая $\rho(r) = \text{const}$ можно проинтегрировать уравнения (I.1), (I.12) и найти, что

$$m_r = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3, \quad P(r) = P_0 - \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2. \quad (\text{II.6})$$

В заключение этого раздела обратим внимание на следующее. В предыдущей главе мы уже сталкивались со степенной зависимостью между давлением и плотностью, когда говорили о показателе адиабаты γ . Какова связь между γ и показателем $1 + 1/n$? Строго говоря, никакой связи нет: показатель адиабаты описывает взаимосвязь P и ρ в процессе адиабатического сжатия или расширения вещества, т.е. характеризует его свойства (одинаковые в звезде и в лабораторных условиях), а показатель политропы – параметр, характеризующий, как связаны *распределения* величин P и ρ вдоль радиуса звезды. Тем не менее, возможна ситуация, когда величины γ и $1 + 1/n$ равны друг другу, хотя и характеризуют разные сущности – это случай звезд, у которых вдоль радиуса постоянны химический состав и энтропия.

Чтобы понять это, вспомним, что энтропия, как и давление вещества являются функциями температуры T , плотности ρ и химического состава X , т.е. $S = S(T, \rho, X)$ и $P = P(T, \rho, X)$. Исключая T из этих зависимостей как параметр получим, что $P = P(\rho, S, X)$. В адиабатическом процессе, т.е. при $S = \text{const}$ (и при неизменном химсоставе), это позволяет получить зависимость (I.34) между начальным (индекс 0) и конечным (индекс 1) состоянием вещества:

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^\gamma.$$

Теперь рассмотрим политропную звезду, в которой зависимость P от ρ вдоль радиуса звезды описывается соотношением

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{1+1/n},$$

где теперь индекс 0 относится к центру звезды, а 1 – к точке, удаленной от центра на расстояние r . Если мысленно перенести, скажем, один грамм вещества из центра в точку r , в которой такие же значения S и X , как в центре, то оба соотношения должны давать одинаковый результат, но для этого необходимо, чтобы $\gamma = 1 + 1/n$. Соответственно если S и X постоянны вдоль всей звезды, то величины γ и $1 + 1/n$ будут равны во всех точках – что и требовалось доказать. Позднее мы увидим, что в случае белых карликов и звезд нижней части главной последовательности условия $S(r) = \text{const}$ и $X(r) = \text{const}$ выполняются с достаточно высокой точностью, что позволяет аппроксимировать структуру этих объектов с помощью теории политропных звезд.

II.1 Интегральные соотношения для политропных звезд.

В этом разделе будут получены явные выражения для энергии политропных звезд. Начнем с гравитационной энергии $U_n \equiv U(n)$. В первую очередь рассмотрим шары с постоянной плотностью, что соответствует случаю $n = 0$. Используя первое из равенств (II.6) проинтегрируем соотношение (I.9) и получим (см. задачу II.1):

$$U_0 = -\frac{3GM^2}{5R}. \quad (\text{II.7})$$

Теперь рассмотрим политропные шары с $n > 0$. Дифференцируя соотношение (II.1) находим:

$$\frac{dP}{\rho} = K(n+1) \cdot d(\rho^{1/n}) = (n+1) \cdot d\left(\frac{P}{\rho}\right). \quad (\text{II.8})$$

Тогда из уравнения гидростатического равновесия, записанного в форме (I.17), с учетом условия (II.5) и принятой нормировки потенциала $\varphi(\infty) = 0$, следует, что потенциал гравитационного поля внутри политропной звезды можно представить в виде:

$$\varphi_n(r) = -\frac{GM}{R} - (n+1) \frac{P(r)}{\rho(r)}. \quad (\text{II.9})$$

С помощью (I.26) и (II.9) это выражение преобразуется в соотношение

$$U_n = \frac{1}{2} \int_0^M \varphi \, dm = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{6} U_n,$$

которое представляет собой алгебраическое уравнения для U_n . Решив его получаем:

$$U_n = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}. \quad (\text{II.10})$$

Любопытно, что формула дает правильный ответ – выражение (II.7), и когда $n = 0$, хотя выводилась она при условии, что $n > 0$.

Согласно (I.9), U должно быть < 0 , поэтому из полученного выражения следует, что политропные шары с $n > 5$ не представляет для нас интереса. В следующем разделе мы увидим, что политропный шар с $n = 5$ имеет бесконечно большой радиус, но конечную массу и конечное (отрицательное!) значение U (см. задачу II.4), следовательно, для политропных звезд имеет смысл рассматривать интервал $0 \leq n \leq 5$.

С помощью теоремы вириала (I.36) получается следующее выражение для тепловой энергии политропной звезды (см. задачу II.5):

$$Q \equiv \int_0^M E \, dm = \frac{1}{(\gamma-1)(5-n)} \frac{GM^2}{R}. \quad (\text{II.11})$$

В интересующем нас случае $n \leq 5$ эта формула дает для Q положительные значения, поскольку, как было отмечено в разделе I.6, показатель адиабаты вещества звезды удовлетворяет условию $\gamma > 1$.

Полная энергия политропной звезды:

$$W \equiv U + Q = \frac{(4 - 3\gamma)}{(\gamma - 1)(5 - n)} \frac{GM^2}{R}. \quad (\text{II.12})$$

Из полученного выражения следует, что для представляющих интерес индексов политропы ($n \leq 5$) звезда будет гравитационно связанной (условие $W < 0$), если выполняется необходимое условие устойчивости: $\gamma > 4/3$.

II.2 Структура политропных звезд

Рассмотрим теперь задачу о структуре политропных звезд, имея ввиду, что $0 < n \leq 5$. Для ее решения мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} P &= K\rho^{1+1/n} \\ P' &= -\rho Gm/r^2 \\ m' &= 4\pi r^2 \rho \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

С учетом (II.8) из двух первых уравнений системы можно получить:

$$\frac{K(n+1)r^2}{G} \cdot \frac{d}{dr} (\rho^{1/n}) = -m. \quad (\text{II.14})$$

Если продифференцировать обе части этого равенства и вместо m' подставить правую часть третьего уравнения системы (II.13), то получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{K(n+1)}{4\pi G r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} (\rho^{1/n}) \right] = -\rho. \quad (\text{II.15})$$

Решение этого уравнения, т.е. зависимость $\rho = \rho(r)$, можно найти задав значения ρ и $d\rho/dr$ в центре звезды (начальные условия):

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{d\rho}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (\text{II.16})$$

Второе начальное условие следует из соотношения (II.8):

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{n}{K(n+1)} \rho^{-1/n} \frac{dP}{dr} \quad (\text{II.17})$$

с учетом равенства (I.13).

Напомним, что при $n > 0$ внешней границей звезды является точка $r = R$, в которой плотность газа становится равной нулю – см. условие (II.5). Следовательно интегрировать уравнение (II.15) нужно вплоть до значения r , при котором $\rho(r) = 0$. Иными словами, радиус звезды определяется в результате интегрирования.

После того как найдена функция $\rho(r)$ зависимость $m(r)$ можно определить либо путем интегрирования третьего уравнения исходной системы (II.13), либо с помощью соотношения (II.14), переписав его в виде:

$$m = -\frac{K(n+1)r^2}{nG} \rho^{1/n-1} \cdot \frac{d\rho}{dr}. \quad (\text{II.18})$$

Второй способ гораздо проще, поскольку в процессе интегрирования уравнения (II.15) вычисляется не только функция $\rho(r)$, но и ее производная, что позволяет непосредственно находить $m(r)$. Таким образом, полная масса звезды, как и ее радиус, определяется после завершения интегрирования.

При фиксированном n решение уравнения (II.15) зависит от двух свободных параметров: ρ_0 и K . Следовательно, чтобы при данном индексе политропы построить модель звезды с интересующими нас значениями радиуса R и массы M необходимо многократно проинтегрировать уравнение (II.15) с разными значениями ρ_0 и K , постепенно подбирая нужные величины этих параметров.

Однако можно значительно упростить решение задачи о нахождении структуры звезды заданной массы и радиуса при фиксированном индексе политропы. Для этого следует использовать безразмерные переменные θ и ξ , которые мы введем с помощью соотношений

$$\theta = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/n}, \quad \xi = \frac{r}{r_0}, \quad \text{где} \quad r_0 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2} \rho_0^{(1-n)/2n}. \quad (\text{II.19})$$

Тогда из уравнения (II.15), описывающего зависимость $\rho = \rho(r)$, получим для функции $\theta(\xi)$ дифференциальное уравнение Лэна-Эмдена:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0, \quad \text{или} \quad \theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta^n = 0 \quad (\text{II.20})$$

с начальными условиями:

$$\theta = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (\text{II.21})$$

Первое из начальных условий непосредственно вытекает из определения переменной θ , а второе получается из соотношения

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{r_0 \theta^{1-n}}{n\rho_0} \cdot \frac{d\rho}{dr},$$

с учетом равенства нулю величины $d\rho/dr$ в центре звезды, т.е. при $r = \xi = 0$.

Начальные условия (II.21) дают возможность проинтегрировать уравнение (II.20) от точки $\xi = 0$ до $\xi = \xi_n$, где ξ_n – значение ξ , определяемое в процессе интегрирования, при котором $\theta(\xi) = 0$. Тем самым мы определим зависимость $\theta = \theta(\xi)$. Единственным параметром уравнения в этом случае является индекс политропы n , и для различных его значений решение (II.21) было получено еще в XIX веке.

Если ввести "безразмерную массу" z с помощью соотношения

$$m(r) = z(\xi) \cdot m_0, \quad m_0 = 4\pi r_0^3 \rho_0, \quad (\text{II.22})$$

то из уравнения (II.18) получим простой алгоритм ее вычисления:

$$z = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (\text{II.23})$$

Один раз рассчитав для представляющих интерес значений n зависимости $\theta(\xi)$ и $z(\xi)$ можно с помощью преобразований (II.19) найти соответственные "размерные" функции $\rho(r)$ и $m(r)$. Если известны радиус и масса политропной звезды, то необходимые для перехода к размерным переменным значения ρ_0 и K можно определить, выразив их из соотношений:

$$R = \xi_n \cdot \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \cdot \rho_0^{(1-n)/2n}, \quad (\text{II.24})$$

$$M = z_n 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \cdot \rho_0^{(3-n)/2n}, \quad (\text{II.25})$$

где ξ_n и z_n — значения величин ξ и z на внешней границе звезды соответственно.

Таким образом, переход к безразмерным переменным сделал задачу изучения структуры политропных звезд гораздо более простой по сравнению с использованием "размерных" переменных и уравнения (II.15).

При $n > 0$ уравнение Лэна-Эмдена имеет аналитические решения, удовлетворяющие начальным условиям (II.21), когда $n = 1$ или $n = 5$.

Если $n=1$, то

$$\theta = \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad z = \sin \xi - \xi \cos \xi, \quad (\text{II.26})$$

поэтому $\theta = 0$ при $\xi_1 = \pi$, откуда следует, что и $z_1 = \pi$.

Если $n=5$, то

$$\theta_5 = \left(\frac{3}{3 + \xi^2} \right)^{1/2}, \quad z_5 = \sqrt{3} \left(\frac{\xi^2}{3 + \xi^2} \right)^{3/2}. \quad (\text{II.27})$$

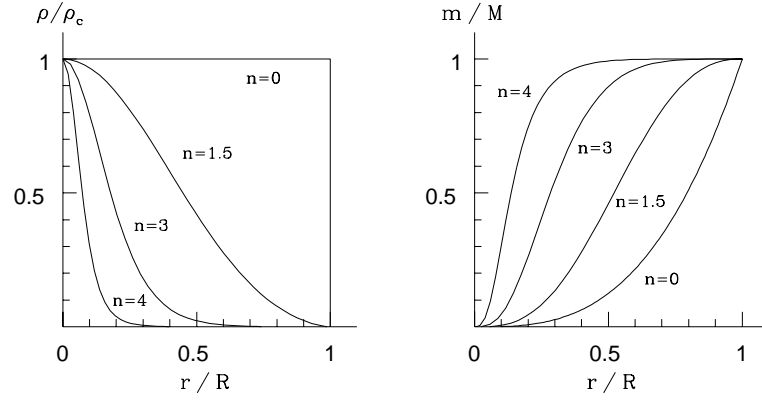
Следовательно, политропа с индексом $n = 5$ имеет бесконечный радиус ($\theta_5 = 0$ при $\xi \equiv \xi_5 = \infty$), но конечную массу $z_5 = z(\infty) = \sqrt{3}$, т.е.

$$M_5 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{9K^{3/2}}{G^{3/2} \rho_0^{1/5}}. \quad (\text{II.28})$$

При других n уравнение (II.20) интегрируется численно. Чтобы избежать сингулярности при $\xi = 0$, интегрировать начинают не с 0, а с некоторого малого значения ξ , учитывая, что при $\xi \ll 1$ справедливо разложение (см. задачу II.6):

$$\theta \approx 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{n\xi^4}{120} - \dots \quad (\text{II.29})$$

Структура политропных звезд при разных значениях n показана на Рис. II.2. Отметим, что поскольку по оси абсцисс этого рисунка отложено отношение r/R , отобразить на нем структуру звезды с $n = 5$ нельзя, ибо в этом случае $R = \infty$.

Рис. II.2: Структура политропных звезд с разными значениями n .

Исключая K из соотношений (II.24), (II.25) получим выражение для центральной плотности звезды ρ_0 через ее массу и радиус:

$$\rho_0 = \frac{\xi_n^3}{3z_n} \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \equiv \frac{\xi_n^3}{3z_n} \cdot \bar{\rho}, \quad (\text{II.30})$$

где $\bar{\rho}$ – средняя плотность звезды. Отношение $\bar{\rho}/\rho_0$ приведено в таблице II.1. Из таблицы и правой панели Рис. II.2 видно, что по мере увеличения n растет концентрация массы к центру звезда.

Если подставить выражение (II.2) в соотношения (II.24), (II.25), а затем исключить из них ρ_0 , то получим выражение для давления в центре звезды:

$$P_0 = \frac{\xi_n^4}{4\pi(n+1)z_n^2} \cdot \frac{GM^2}{R^4}. \quad (\text{II.31})$$

Формула, однако, не работает при $n = 5$, поскольку ξ_5 и R бесконечно велики, в результате чего возникает неопределенность вида ∞/∞ . Но выразив K из (II.28) и подставив в соотношение $P_0 = K \rho_0^{6/5}$ можно получить альтернативную формулу:

$$P_0^{n=5} = \left(\frac{\pi}{162} \right)^{1/3} GM^{2/3} \rho_0^{4/3}.$$

В заключение этого раздела отметим, что из соотношения (II.24) следует, что при $n = 1$ радиус политропного шара не зависит от центральной плотности ρ_0 , хотя масса зависит. А при $n = 3$ ситуация обратная: радиус звезды зависит от ρ_0 , а масса не зависит и равна

$$M_{n=3} = \frac{4z_3}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2} \approx 4.56 \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2}. \quad (\text{II.32})$$

Таблица II.1: Параметры политропных моделей

n	ξ_n	z_n	$\bar{\rho}/\rho_0$	f_n
0	2.45	4.90	1.00	2.88
1.0	3.14	3.14	$3.18 \cdot 10^{-1}$	4.29
1.5	3.65	2.71	$1.67 \cdot 10^{-1}$	4.86
2.0	4.35	2.41	$8.77 \cdot 10^{-2}$	5.39
3.0	6.90	2.02	$1.85 \cdot 10^{-2}$	6.39
4.0	15.0	1.80	$1.61 \cdot 10^{-3}$	7.39
5.0	∞	1.73	0.00	8.65

II.3 Эволюция центральных областей политропных звезд

Рассмотрим звезды, центральные области которых состоят из газа с уравнением состояния Клайперона-Менделеева:

$$P = \frac{\rho \Re T}{\mu},$$

где \Re – т.н. универсальная газовая постоянная, а μ – молекулярный вес газа (подробнее см. Главу III).

В этом случае из (II.2) следует, что:

$$K = \frac{\Re T_0}{\mu_0} \rho_0^{-1/n}, \quad (\text{II.33})$$

а из соотношений (II.24), (II.25) получается следующее выражение для центральной температуры звезды через ее массу и радиус:

$$T_0 = \frac{\mu_0}{\Re} \cdot \frac{\xi_n}{(n+1) z_n} \cdot \frac{GM}{R}. \quad (\text{II.34})$$

В частности, подставляя параметры Солнца для $n = 3$ и $\mu_0 \approx 0.6$ (см. стр.50) получим $T_0^\odot \approx 1.2 \cdot 10^7$ К, что всего на 30 % меньше значения, полученного из численных расчетов.

Отметим, что если заменить в уравнении гидростатического равновесия (I.12) dP/dr на P_0/R , а $\rho Gm/r^2$ на $\rho_0 GM/R^2$, то можно получить соотношение (II.34) без множителей, зависящих от n .¹

¹В определенном смысле такое совпадение можно назвать случайным, о чем будет сказано в конце этой главы. Без структурных коэффициентов соотношение (II.34) сводится к утверждению, что $T_0 \propto M/R$, которое, например, не позволяет понять, почему у красных гигантов с массой $1 M_\odot$ температура в центре на порядок выше, чем у Солнца, хотя их радиус на порядок больше солнечного, и, казалось бы, соотношение между их центральными температурами должно быть противоположным.

Исключая R из соотношений (II.30) и (II.34) находим, что для звезды данной массы изменение температуры и плотности в центре связаны соотношением:

$$T_0 = \frac{(4\pi)^{1/3} G}{\Re f_n} \cdot \mu_0 \rho_0^{1/3} M^{2/3} \approx 3 \cdot 10^6 \rho_0^{1/3} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3}, \quad (\text{II.35})$$

где $f_n = (n+1) z_n^{2/3}$ – множитель, величина которого, как видно из таблицы II.1, меняется всего в 2 раза при $1 \leq n \leq 5$. Для численной оценки принято $f_n = 6.2$, $\mu_0 = 0.6$.

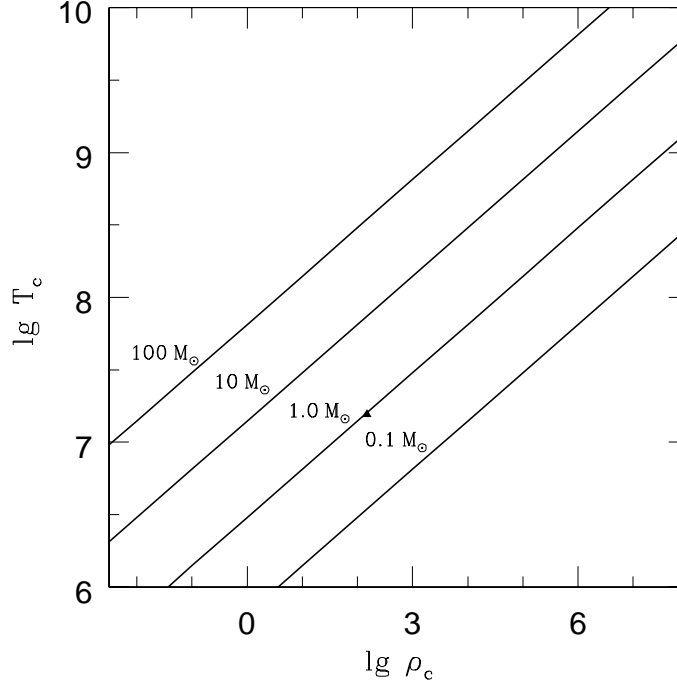


Рис. II.3: Изменение параметров в центре политропных невырожденных звезд разной массы. Треугольником показаны параметры в центре Солнца, соответствующие т.н. стандартной модели.

II.4 Изотермические шары из идеального газа

Рассмотрим шар, состоящий из газа с уравнением состояния

$$P = \frac{\rho \Re T}{\mu} \quad (\text{II.36})$$

(подробнее см. раздел III.3). Предположим, что температура T и молекулярный вес газа μ не меняются вдоль радиуса. Давление и плотность вдоль радиуса такого шара, который мы для краткости будем называть изотермическим, связаны соотношением:

$$P = K \rho, \quad K \equiv \frac{\Re T}{\mu} = \text{const}, \quad (\text{II.37})$$

что формально соответствует политропе с индексом $n = \infty$ – см. определение (II.1).

Мы уже отмечали, что при $n > 5$ политропные шары имеют бесконечно большую массу, т.е. они не могут быть моделями реальных звезд. Поэтому структуру изотермического шара имеет смысл рассматривать лишь в случае, когда на каком-то расстоянии от центра к поверхности шара приложено внешнее давление P_{out} , обусловленное окружающей средой. Такая ситуация возникает при рождении звезд и у звезд промежуточных масс после выгорания водорода в их центральных областях – см. Главы X и XII соответственно. В первом случае внешнее давление создает межзвездный газ, окружающий зародыш звезды, а во втором – вес вышележащей (неизотермической!) оболочки звезды.

Введем безразмерные переменные – сравните с (II.19):

$$\xi = r/r_0, \quad \theta = \ln \frac{\rho}{\rho_0} \leq 0, \quad z = \frac{m}{m_0}, \quad (\text{II.38})$$

где ρ_0 – центральная плотность, а

$$r_0 = \left(\frac{K}{4\pi G \rho_0} \right)^{1/2}, \quad m_0 = 4\pi r_0^3 \rho_0 = \frac{K^{3/2}}{\sqrt{4\pi \rho_0} G^{3/2}}. \quad (\text{II.39})$$

Тогда таким же путем, как и в случае конечных n , из законов сохранения массы и гидростатического равновесия получается "изотермическое" уравнение Лэна-Эмдена:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + e^\theta = 0, \quad \text{или} \quad \theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + e^\theta = 0, \quad (\text{II.40})$$

которое отличается от (II.20) заменой члена θ^n на e^θ . Начальные условия для этого уравнения:

$$\theta = 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0,$$

а находить безразмерную массу, как и при конечных n , можно по формуле

$$z = -\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Еще Эмден показал, что

$$e^\theta = \frac{\rho}{\rho_0} \approx 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{45}, \quad z \approx \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^5}{30} \quad \text{при} \quad \xi \ll 1 \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{2}{\xi^2}, \quad z \approx 2\xi \quad \text{при} \quad \xi \gg 1. \quad (\text{II.42})$$

Из (II.42) следует, что при увеличении радиуса изотермического шара плотность и давление на его границе монотонно убывают, асимптотически приближаясь к 0, а масса неограниченно возрастает. Результаты численного решения уравнения (II.40) показаны на Рис. II.4.

Рассмотрим совокупность изотермических гидростатически равновесных шаров, у которых одинаковы масса M и отношение T/μ , т.е. величина K . Эти шары будут

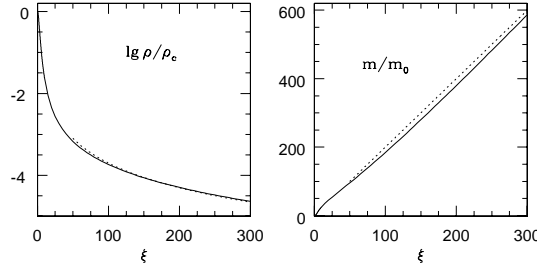


Рис. II.4: Результаты численного решения уравнения (II.40). Пунктирной линией показаны асимптотики (II.42).

иметь различные радиусы R , величина которых зависит от центральной плотности ρ_0 . Из соотношений (II.38) и (II.39) следует, что

$$\rho_0 = \frac{K^3 z^2}{4\pi G^3 M^2}. \quad (\text{II.43})$$

Подставив это выражение в определение величины r_0 получим:

$$R = \frac{\xi}{z} R_0, \quad R_0 \equiv \frac{GM}{K}, \quad (\text{II.44})$$

Давление газа на поверхности шаров отлично от нуля и может быть записано в виде: $P_s = K\rho_s = K\rho_0 e^\theta$. Поэтому, с учетом (II.43), имеем:

$$P_s = p_s \cdot P_0, \quad \text{где} \quad p_s \equiv \frac{z^2 e^\theta}{4\pi}, \quad P_0 \equiv \frac{K^4}{G^3 M^2}. \quad (\text{II.45})$$

Зависимость $p_s = p_s(\xi)$, вычисленная по результатам численного интегрирования уравнения (II.40), показана на Рис. II.5. Характерной особенностью функции $p_s(\xi)$ является наличие максимума $p_s^* \approx 1.398$, который достигается при $\xi^* \approx 6.45$ и $z^* = z(\xi^*) \approx 15.7$. Для "размерных" переменных соответственно получим:

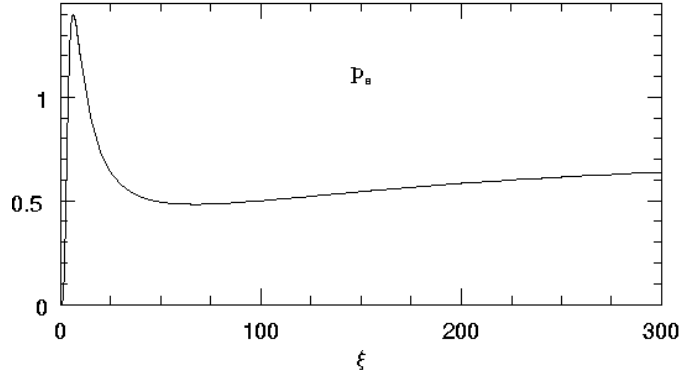
$$R^* = \frac{\xi^*}{z_*} R_0 \approx 0.41 \frac{GM}{K}, \quad P_s^{max} \approx 1.40 \frac{K^4}{G^3 M^2}. \quad (\text{II.46})$$

Центральная плотность шара, соответствующая этим значениям, согласно (II.43), равна:

$$\rho_0 = \frac{K^3 z_*^2}{4\pi G^3 M^2}. \quad (\text{II.47})$$

Изотермический шар будет находится в равновесии, если давление на его границе P_s равно внешнему давлению P_{out} . Поэтому тот факт, что функция $p_s(\xi)$ ограничена сверху означает, что при фиксированном значении K изотермический шар с массой M может существовать, если внешнее давление не превышает величину $P_{out}^{max} = p_s^* \cdot P_0$. Если же $P_{out} > P_{out}^{max}$, то шар начнет сжиматься, а его структура должна перестроиться за гидродинамическое время.

Но почему давление газа на внешней границе изотермического шара данной массы не может быть сколь угодно большим? Казалось бы, увеличивая центральную

Рис. II.5: Зависимость структурного множителя p_s от ξ .

плотность можно неограниченно увеличивать и давление на поверхности шара. Однако следует учесть, что чем больше ρ_0 , тем быстрее будет уменьшаться давление (и плотность) по мере удаления от центра шара, поскольку $dP/dr = -\rho g$. Скорей всего, именно это обстоятельство приводит к тому, что при достаточно больших ρ_0 увеличение центральной плотности сопровождается уменьшением величины P_s . Это, в свою очередь, и означает, что у зависимости $P_s(\rho_0)$ имеется максимум.

Впрочем, приведенное "объяснение" – не более чем правдоподобное рассуждение, попытка на качественном уровне понять результат, уже полученный из численных расчетов.

II.5 Составные политропные конфигурации

Ситуации, когда структуру всей звезды можно аппроксимировать единой политропной зависимостью (II.1), встречаются редко. Чаще оказывается, что для описания различных областей подходят политропы с разными индексами n . В частности, мы уже упоминали звезды, у которых центральные области (ядро) изотермичны ($n = \infty$), а внешние (оболочка) – нет. Другим примером могут служить массивные звезды на начальной главной последовательности: позднее мы увидим, что их ядро хорошо описывается политропой с $n = 1.5$, а оболочка – политропой с $n = 3$. Рассмотрим этот случай более подробно.

Вначале предположим, что нам известна масса центрального ядра M_c , а также плотность ρ_0 и давление P_0 в центре звезды. Покажем, что эти данные полностью определяют структуру звезды, включая ее полную массу и радиус.

Чтобы решить поставленную задачу перейдем к безразмерным переменным. Для ядра эти переменные вводятся так же, как для звезды, описываемой единой политропной зависимостью с $n = 1.5$:

$$\xi = \frac{r}{r_{0c}}, \quad \theta = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{3/2}, \quad z = \frac{m}{m_{0c}}, \quad (\text{II.48})$$

где

$$K_c = P_0 \rho_0^{-5/3}, \quad r_{0c} = \left(\frac{5K_c}{8\pi G} \right)^{1/2} \rho_0^{-1/6}, \quad m_{0c} = 4\pi r_{0c}^3 \rho_0,$$

а индекс c у величин K , r_0 и m_0 указывает, что они относятся к ядру.

В результате для ядра получается уравнение Лэна-Эмдена (II.20) с $n = 1.5$ и начальными условиями (II.21), поэтому структура ядра описывается функциями Лэна-Эмдена $\theta = \theta_{1.5}(\xi)$, $z = z_{1.5}(\xi)$. Это решение следует оборвать на некотором значении ξ_c , которое соответствует границе ядра и должно быть меньше величины $\xi_{1.5}$ из Табл. II.1. Поскольку массу ядра мы считаем известной, величина ξ_c определяется (неявным образом) из условия $z_c = M_c/m_{0c}$. При этом становятся известными и значения $\theta_c = \theta_{1.5}(\xi_c)$, $\theta'_c = \theta'_{1.5}(\xi_c)$, что позволяет найти и "размерные" значения радиуса R_c , плотности ρ_c и давления P_c на внешней границе ядра из соотношений (II.48).

Чтобы описать структуру оболочки (envelope) с $n = 3$ введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\xi = \frac{r}{r_{0e}}, \quad \theta = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^3, \quad z = \frac{m}{m_{0e}}, \quad (\text{II.49})$$

где

$$K_e = P_c \rho_c^{-4/3}, \quad r_{0e} = \left(\frac{K_e}{\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/3}, \quad m_{0e} = 4\pi r_{0e}^3 \rho_c.$$

В результате для функции $\theta = \theta(\xi)$ получится уравнение Лэна-Эмдена (II.20) для политропы с индексом $n = 3$:

$$\theta'' + \frac{2}{\xi} \theta' + \theta^3 = 0. \quad (\text{II.50})$$

Однако его решение для оболочки не является функцией Лэна-Эмдена θ_3 , поскольку теперь уравнение (II.50) должно решаться с начальными условиями:

$$\theta = 1, \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \theta'_e \quad \text{при} \quad \xi = \xi_e, \quad (\text{II.51})$$

которые отличаются от (II.21).

Значения ξ_e и θ'_e определяются из требования непрерывности величин r , m , P и ρ в точке "сшивки" ядра и оболочки:

$$P_c = K_c \rho_c^{5/3} = K_e \rho_c^{4/3}, \quad R_c = r_{0c} \xi_c = r_{0e} \xi_e, \quad M_c = m_{0c} z_c = m_{0e} z_e.$$

После преобразований с учетом (II.23) из этих условий получаем: $K_e = K_c \rho_c^{1/3}$ и

$$\xi_e = \sqrt{\frac{5}{8}} \theta_c^{1/4} \cdot \xi_c, \quad \theta'_e = \sqrt{\frac{5}{8}} \theta_c^{-5/4} \cdot \theta'_c. \quad (\text{II.52})$$

Отметим, что безразмерные переменные в точке сшивки терпят разрыв: в частности, легко видеть, что $\xi_e < \xi_c$, $\theta_e > \theta_c$.

Проинтегрируем уравнение (II.50) с начальными условиями (II.51) вплоть до точки $\xi = \xi_f$, в которой функция $\theta(\xi)$ станет равной 0. При этом нам станет известна величина $z_f = z(\xi_f)$, что позволит из соотношений (II.49) найти не только радиус звезды R , но и ее полную массу M . Те же соотношения позволят определить "размерные" значения физических величин в любой другой точке оболочки.

Тем самым мы доказали исходное утверждение о том, что задав три параметра (P_0 , ρ_0 и M_c) можно полностью определить структуру и интегральные параметры звезды, составленной из двух политроп с $n_1 = 1.5$ и $n_2 = 3$. Вместе с тем, из соотношения (II.52) следует, что для описания структуры такой двухполитропной конфигурации в безразмерных переменных необходимо задать всего один параметр – ξ_c , который определяет место сшивки политроп. Отсюда следует, что если зафиксировать эту точку, то для звезд с различными значениями P_0 , ρ_0 отношение $M_c/M = z_c/z_f$ будет одинаковым.

Рассчитав серию моделей рассматриваемого типа с различными значениями ξ_c можно убедиться, что величина z_c/z_f , т.е. относительная масса ядра, монотонно возрастает от 0 до 1 по мере того, как точка ξ_c смещается от центра ($\xi_c = 0$) до максимально возможного значения $\xi_c \approx 3.65$, соответствующего границе политропы с $n = 1.5$ – см. Табл. II.1. Отсюда следует, что задав величину M_c/M можно однозначно определить положение точки сшивки ξ_c , что однозначно определяет и всю безразмерную структуру звезды, включая параметры θ_c , z_c и z_f .

По этой причине две звезды с одинаковым отношением M_c/M будут иметь одинаковые относительные радиусы, т.е. рассматриваемая составная конфигурация обладает свойством подобия того же типа, как и одиночная политропа – см. (XVI.2).

Сшивка двух политропных решений с другими значениями индексов n_1 , n_2 производится аналогичным способом. Однако, если в рассмотренном случае ($n_1 = 1.5$, $n_2 = 3$) относительная масса ядра может иметь любое значение в интервале от 0 до 1, то в общем случае это не так – подробнее см. [19]. В частности, в разделе XII.3.2 мы увидим, что масса изотермического ядра, состоящего из идеального бoльцмановского газа, не может превышать 10 – 15 % массы всей звезды.

Задачи

Задача II.1. Получите выражение для гравитационной энергии политропного шара с индексом $n = 0$, т.е. соотношение (II.7).

Задача II.2. Убедитесь, что величина r_0 в (II.19) имеет размерность длины.

Задача II.3. Показать, что политропные звезды с одинаковым индексом политропы n гомологичны.

Задача II.4. Показать, что гравитационная энергия политропного шара с индексом $n = 5$ имеет конечное значение

$$U_5 = -\frac{\pi^{1/3}}{3^{7/3} 2^{10/3}} \cdot GM^{5/3} \rho_0^{5/3}.$$

Задача II.5. Получить выражение (II.11) для тепловой энергии политропной звезды.

Задача II.6. Получите разложение (II.29). *Указание:* представить θ в виде ряда

$$\theta = 1 + \sum_{i=1}^6 c_i \xi^i,$$

подставить этот ряд в уравнение (II.20), а затем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ξ , определить величины c_i .

Задача II.7. Используя асимптотики (II.41), (II.42) убедитесь, что при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$ отношение ξ/z стремится к ∞ и $1/2$ соответственно.

Задача II.8. Покажите, что выражение для гравитационной энергии E_g изотермического шара с массой M и радиусом R (давление на внешней границе > 0) может быть записано в виде:

$$E_g = k_g \cdot \frac{GM^2}{R},$$

где k_g – безразмерный множитель, причем $k_g \approx 3/5$ и $k_g \approx 1.0$ при $\xi \ll 1$ и $\xi \gg 1$ соответственно.

Задача II.9. Используя асимптотики (II.41), (II.42) для изотермической сферы показать, что при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$ величина p_s стремится к значениям 0 и $2/\pi \approx 0.64$ соответственно. Сравните полученный результат с графиком функции $p_s(\xi)$ на Рис. II.5.

Задача II.10. Получить приближенные значения R^* и P_s^{max} для изотермической сферы с помощью теоремы вириала, записанной в форме (I.25)

Задача II.11. Рассмотрим совокупность звезд, ядро каждой из которых может быть описано политропой с $n_1 = 1.5$, а оболочка – политропой с $n_2 = 3$. Предположим, что состояние вещества в ядре описывается уравнением Клайперона-Менделеева с

постоянным молекулярным весом μ . Показать, что если у этих звезд относительная масса ядра M_c/M одинакова, то

а) на границе ядра справедливо соотношение:

$$\frac{T_c^3}{\rho_c} = \text{const} \cdot M^2, \quad (\text{II.53})$$

б) значения центральной плотности ρ_0 и температуры T_0 зависят от массы и радиуса звезды следующим образом:

$$\rho_0 = \text{const} \cdot \frac{M}{R^3}, \quad T_0 = \text{const} \cdot \frac{M}{R}. \quad (\text{II.54})$$

Глава III

Уравнение состояния звездного вещества

III.1 О термодинамическом равновесии в звездах

Как известно, любая изолированная система после релаксации переходных процессов приходит в состояние термодинамического равновесия. Используя аппарат современной термодинамики и статистической физики в такой системе можно выразить величины, характеризующие свойства вещества (давление, внутренняя энергия, показатель адиабаты и т.п.), через термодинамические параметры системы (плотность, температуру и некоторые другие). Однако можно ли применять в звездах соотношения, полученные для термодинамически равновесной ситуации, учитывая, что звезды заведомо не являются изолированными системами: они излучают энергию в окружающее пространство, а с их поверхности, как правило, происходит истечение вещества.

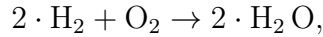
Оказывается, да, можно, но только для слоев, находящиеся ниже уровня фотосферы звезды. В этих слоях характерное время релаксационных процессов, приводящих к установлению равновесного распределения частиц и фотонов по энергиям, ионов по стадиям ионизации и т.п., гораздо меньше времени, связанного с перестройкой структуры звезды вследствие излучения тепла и/или уменьшения массы – см. раздел I.5.¹

Но как же быть с тем, что термодинамически равновесная система должна характеризоваться одним единственным значением температуры, а в звездах температура падает от центра к краю, поскольку с поверхности звезды происходит излучение энергии? Эту трудность обходят, используя гипотезу о том, что в звездах имеет место т.н. *локальное термодинамическое равновесие* (ЛТР). В рамках этой гипотезы предполагается, что в каждой точке звезды имеет место термодинамическое равновесие, соответствующее локальной температуре.

В звездах происходит множество разнообразных процессов, в ходе которых вза-

¹Можно провести такую аналогию: если за время, необходимое для переноски ведра от колодца до дома, через дырки выливается пренебрежимо малая часть воды, можно считать, что дырок в ведре нет. Вопрос о том, что считать пренебрежимо малой частью, эквивалентен в данном контексте вопросу о точности, с которой необходимо знать уравнение состояния.

взаимодействие двух или большего числа частиц приводит к образованию частиц, отличных от исходных. Будем обобщенно называть такого рода процессы реакциями. Примером таких взаимодействий могут служить химические реакции



ядерные реакции



процессы ионизации водорода фотоном

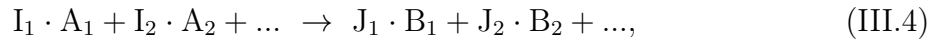


или электронным ударом



и т.д. и т.п.

В общем виде все эти реакции можно в символическом виде записать следующим образом:



где A_i и B_j – это символы, обозначающие исходные частицы-реагенты и частицы-продукты реакции соответственно, а коэффициенты I_i и J_j – числа, которые показывают, какое количество частиц данного сорта участвует или возникает в одной реакции, т.е. в одном акте взаимодействия. Числовые коэффициенты подбираются так, чтобы выполнялись законы сохранения, например, массы. В приведенных выше примерах I_i и J_j везде равны 1 за исключением первой и последней реакций, в которых $I_1 = 2$, $J_1 = 2$ и $J_2 = 2$ соответственно.

В символической записи реакции стрелка указывает направление процесса. Однако, в принципе, все реакции могут протекать как в прямом, так и в обратном направлениях. Что именно будет происходить при обратной реакции можно понять, изменив направление стрелки в записи реакции на противоположное, и прочитать запись справа налево. Образно говоря, следует заснять видеоролик прямой реакции, а затем "прокрутить кино наоборот".

Особенность *полного* термодинамического равновесия в том, что скорость протекания любой прямой реакции, т.е. число актов взаимодействия за 1 секунду в 1 см³, равна скорости протекания обратной реакции – т.н. принцип детального равновесия. Это приводит к тому, что концентрации реагентов N_i и продуктов реакции N_j не являются независимыми. Иными словами, существует соотношение, связывающее величины N_i и N_j , которое зависит от термодинамических параметров системы, главным образом, от температуры – подробнее см., например, [6]. В общем случае это соотношение называется законом действующих масс, и в разделе III.3.1 будет приведена его конкретная форма для процессов, определяющих ионизационный баланс газа – т.н. формула Саха (M.Saha, 1921).²

²Не следует путать понятие термодинамического равновесия с понятием стационарности, которое является более общим условием. Например, в короне Солнца ионизация водорода происходит, главным образом, электронным ударом по схеме (III.3), а рекомбинация, в основном, в результате

Гипотеза о наличии ЛТР включает в себя предположение о том, что процессы, устанавливающие равновесные концентрации частиц, протекают намного быстрее, чем изменения локальных значений температуры T и плотности газа ρ , обусловленные эволюцией звезды. Такое допущение позволяет не рассматривать кинетику множества различных реакций, а использовать соотношение, выражающее закон действующих масс при локальных значениях величин T и ρ , что существенно упрощает вычисления.

Не следует забывать, что гипотеза о наличии ЛТР – это именно гипотеза. Можно показать, что для расчетов химических реакций, степени диссоциации молекул и ионизации газа в слоях, лежащих ниже звездных фотосфер, гипотеза о наличии ЛТР является оправданной. С другой стороны, имеются процессы, для которых применять закон действующих масс, как правило, нельзя. Речь идет о ядерных реакциях, которые меняют химический состав звезды.

Например, при температурах $\sim 3 \cdot 10^8$ К, при которых в звездах происходит реакция превращение углерода в кислород (III.1), количество фотонов, обладающих энергией, достаточной для того, чтобы выбить из ядра кислорода α -частицу, т.е. осуществить обратную реакцию, ничтожно мало. В результате скорость прямой реакции (III.1) в звездах оказывается много больше, чем обратной, что, собственно, и приводит к изменению обилия участвующих в реакции элементов.

Таким образом, в отличие от степени ионизации, например, относительное обилие элементов, т.е. химический состав вещества в разных областях звезды определяется не локальными значениями ρ и T , а предшествующими ядерными реакциями. Существуют и исключения из этого правила, о которых будет сказано в главе VI, однако в подавляющем большинстве случаев при расчетах термодинамических функций вещества звезды (давление, внутренняя энергия и т.п.) его химический состав является независимым параметром, дополнительным к величинами ρ и T . При этом химический состав вещества следует рассчитывать исходя из кинетических уравнений соответствующих ядерных реакций – см. раздел V.

III.2 Общие выражения для термодинамических производных

Приведем без вывода соотношения, которые при известных зависимостях давления $P = P(\rho, T)$ и тепловой энергии $E = E(\rho, T)$ позволяют вычислить т.н. термодинамические производные: теплоемкости при постоянном объеме C_V и постоянном давлении C_P , показатель адиабаты γ , а также т.н. адиабатический градиент ∇_{ad} . Указанные величины мы неоднократно будем использовать в дальнейшем. Естественно,

процесса, обратного (III.2). Таким образом, в данном случае скорости прямых и обратных реакций не равны друг другу, что связано с отсутствием ЛТР в короне Солнца – см. раздел VII. Если отвлечься от событий типа солнечных вспышек, то можно считать, что степень ионизации водорода не меняется со временем (условие стационарности). Поэтому чтобы получить выражение, связывающее концентрацию протонов, электронов и атомов водорода в короне, следует приравнять скорость ионизации электронным ударом к скорости радиативной рекомбинации. Соотношение, которое при этом получается, существенно отличается от формулы Саха.

величины P и E зависят также от химического состава вещества, но указывать на эту зависимость в дальнейшем мы будем только там, где это необходимо.

Вывод выражений для термодинамических производных можно найти, например, в учебнике [6], а здесь мы лишь отметим, что при выводе существенным образом используется первый закон термодинамики:

$$\delta Q = dE + \delta A = dE + P dV, \quad (\text{III.5})$$

где δQ и dE – изменение количества тепла и внутренней энергии рассматриваемой области, δA – работа, совершаемая веществом этой области, а P и V – давление и объем области соответственно.³ Например, если мы рассматриваем объем, соответствующий 1 г вещества, то $V = 1/\rho$, а величины Q и E – количество теплоты и внутренняя энергия в расчете на 1 г.

Если ввести обозначения:

$$K_1 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho, \quad K_2 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T, \quad (\text{III.6})$$

то интересующие нас величины могут быть вычислены следующим образом:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_\rho, \quad C_P = C_V + \frac{T}{\rho^2} \cdot \frac{K_1^2}{K_2}. \quad (\text{III.7})$$

$$\gamma \equiv \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S = \frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{\rho K_2}{P}, \quad (\text{III.8})$$

$$\nabla_{ad} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S = \frac{K_1}{\gamma \rho C_V}. \quad (\text{III.9})$$

Скорость звука в веществе V_s также выражается через термодинамические производные [7]:

$$V_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}. \quad (\text{III.10})$$

Используя связь между термодинамическими производными первый закон термодинамики можно записать в форме:

$$\delta Q = C_P dT - \frac{T K_1}{\rho^2 K_2} dP. \quad (\text{III.11})$$

Если в (III.5) независимыми переменными были температура и объем, то в новой записи – температура и давление.

³Напомним, что использование символа δ для малых приращений величин Q и A служит напоминанием о том, что эти величины не являются функцией состояния системы, в отличие от внутренней энергии, для приращения которой используется символ дифференциала d .

III.3 Область "высоких" температур

Диапазон температур, характерных для внутренних областей звезд – от сотен К (поверхностные слои коричневых карликов) до нескольких десятков миллиардов К (центральные области нейтронной звезды в момент ее рождения).

Позже мы поясним, по какому принципу производится деление на область "высоких" и "низких" температур.

III.3.1 Классический идеальный газ

При наличии термодинамического равновесия в классическом газе распределение частиц по потенциальной энергии описывается законом Больцмана:

$$\frac{N_i}{N_j} = \frac{g_i}{g_j} \exp \left(-\frac{E_i - E_j}{kT} \right), \quad (\text{III.12})$$

где k – постоянная Больцмана, N_i , N_j – число частиц в единице объема на уровнях с энергией E_i , E_j и статистическими весами g_i , g_j .

Количество частиц dN_v в единице объема, скорость поступательного движения которых лежит в интервале от v до $v + dv$ описывается распределением Максвелла:

$$\frac{dN_v(v)}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) v^2 dv, \quad (\text{III.13})$$

где m – масса частицы, T – температура газа, а $N = \int_0^\infty N_v dv$ – общее число частиц в единице объема.

В дальнейшем нам понадобится также функция распределения частиц по кинетическим энергиям поступательного движения, которая может быть получена из распределения Максвелла (по скоростям):

$$\frac{dN_E(E)}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} E^{1/2} \exp \left(-\frac{E}{kT} \right) dE, \quad (\text{III.14})$$

Заметим, что это выражение, равно как и распределение (III.13), применимо при условии, что средняя скорость частиц много меньше скорости света, когда энергия и скорость связаны соотношением $E = mv^2/2$.

Вообще говоря, газ в звездах представляет собой смесь молекул, атомов и ионов различных элементов, а также электронов. Эту совокупность можно рассматривать как смесь газов, каждый из которых состоит из одинаковых частиц. В рамках гипотезы о наличии ЛТР мы должны считать, что все эти газы имеют одинаковую температуру. Тогда давление и внутренняя энергия единичного объема (эрг см⁻³) каждого газа i ($i = 1, 2, \dots$) может быть найдена из следующих соотношений – см. [6]:

$$P_i = N_i kT, \quad (\text{III.15})$$

$$\rho \cdot E_i = N_i \cdot \left(\frac{3}{2} kT + \varepsilon_i \right). \quad (\text{III.16})$$

Энтропия газа, состоящего из частиц сорта i , в расчете на см^3 :

$$s_i = kN_i \left(\frac{3}{2} \ln T - \ln N_i + C_i \right), \quad C_i = \frac{5}{2} + \ln g_i + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi m_i k}{h^2} \right) \quad (\text{III.17})$$

где m_i и g_i – масса и статистический вес частицы соответственно, а h – постоянная Планка. Размерность величины s_i – эрг $\text{см}^{-3} \text{K}^{-1}$.

Давление, энергия и энтропия единицы объема – аддитивные величины, т.е. для смеси нескольких газов:

$$P = \Sigma P_i, \quad E = \Sigma E_i, \quad s = \Sigma s_i. \quad (\text{III.18})$$

Плотность газа определяется нуклонами⁴, входящими в состав ядер химических элементов, из которых состоит вещество звезды:

$$\rho = m_u N_{nuc}, \quad (\text{III.19})$$

где N_{nuc} – концентрация нуклонов, а $m_u = 1.66 \cdot 10^{-24}$ г – атомная единица массы, которая, по определению, равна $1/12$ массы ядра ^{12}C .

Как правило, электроны вносят в общее давление существенный, а в областях, где водород и гелий полностью ионизованы, определяющий вклад. Действительно в этих областях концентрация электронов N_e превышает концентрацию ядер N_i , поэтому из (III.15) следует, что $P_e/P_i = N_e/N_i > 1$.

В макроскопических масштабах вещество звезды электронейтрально. Это условие позволяет связать концентрацию электронов N_e и концентрацию всех имеющихся в газе ионов, заряд которых $Z_j = e \cdot j$, где e – заряд электрона:

$$N_e = \sum_i \sum_j j \cdot N_{ij}. \quad (\text{III.20})$$

Вообще говоря, ионы могут иметь и отрицательный заряд, поэтому индекс j может принимать значения < 0 . Такие ионы встречаются во внешних областях холодных звезд и коричневых карликов. Их вклад в суммарное давление и внутреннюю энергию газа сравнительно мал, однако отрицательный водород, например, является доминирующим источником непрозрачности в фотосфере Солнца – см. раздел VII.0.1.

Обозначим через μ среднее число нуклонов, приходящихся на одну частицу, т.е.

$$\mu \equiv \frac{N_{nuc}}{N}, \quad (\text{III.21})$$

где N – концентрация всех сортов частиц (молекулы, атомы, ионы и электроны). Тогда $N = N_{nuc}/\mu$, откуда получаем уже не раз упоминавшееся уравнение Клайперона-Менделеева:

$$P = \frac{\rho \mathcal{R} T}{\mu}, \quad (\text{III.22})$$

⁴Напомним, что нуклоном называют частицы, входящие в состав атомных ядер, т.е. протоны и нейтроны – см. Главу V. Например, в ядре изотопа $^4\text{He}_2$ четыре нуклона, а в ядре изотопа урана $^{238}\text{U}_{92}$ – 238 нуклонов.

где $\mathfrak{R} \equiv k/m_u \approx 8.31 \cdot 10^7$ эрг/г/К – универсальная газовая постоянная. В системе единиц СИ определенная таким образом величина $\mathfrak{R} = 8.31$ Дж/кг/К.

Во избежание недоразумений сделаем два замечания по поводу отличия наших определений величин m_u и \mathfrak{R} от тех, которые приводятся в учебниках химии и молекулярной физики. Во-первых, из чисто практических соображений химии определяют молекулярный вес (молекулярную массу), как массу вещества *в граммах*, численно равную числу нуклонов в ядре соответствующего атома или молекулы. А если пользоваться нашим определением μ , то в случае, когда газ состоит из *неионизованных* атомов или молекул одного сорта, μ просто равно числу нуклонов, входящих в состав ядер этих частиц. Например для гелия $\mu = 4$, а для молекулы H_2O , в состав которой входит изотоп кислорода ^{16}O , $\mu = 18$. При этом в системе единиц СИ масса выражается в килограммах, тогда как в определение μ , принятое в химии, масса берется в граммах. Нетрудно видеть, что в результате "химическое" μ должно быть в 1000 раз меньше, чем у нас, т.е. для гелия и молекулы воды μ равно $4 \cdot 10^{-3}$ и $18 \cdot 10^{-3}$ соответственно.

Во-вторых, отметим, что с точностью лучше 1 % m_u равно массе атома водорода m_H . Но 1 грамм (опять грамм!), деленный на m_H – это, по определению, число Авогадро N_A . Поэтому приводимое в учебниках химии и молекулярной физике определение универсальной газовой постоянной, как произведения kN_A , должно отличаться от приведенного нами не на 1 %, а на три порядка, если обе величины измеряются в одной системе единиц, например, СИ! Кстати сказать, размерность "химической" газовой постоянной не такая, как у нас: $[\mathfrak{R}] = \text{Дж/кг/К/моль}$.

Приведем выражение для т.н. химического потенциала газа, который равен работе, которую необходимо совершить, чтобы из системы с фиксированной температурой, объемом и химическим составом извлечь (или добавить) одну частицу. Химический потенциал η в расчете на одну частицу сорта i (см., например, [6]) :

$$\eta_i = kT \cdot \ln \left[\frac{N_i}{g_i} \left(\frac{h^2}{2\pi m_i kT} \right)^{3/2} \right] + \varepsilon_i, \quad \text{эрг.} \quad (\text{III.23})$$

В § 101 того же учебника [6] показано, что для реакции (III.4) при наличии термодинамического равновесия выполняется условие:

$$I_1 \cdot \eta_{A_1} + I_2 \cdot \eta_{A_2} + \dots = J_1 \cdot \eta_{B_1} + J_2 \cdot \eta_{B_2} + \dots \quad (\text{III.24})$$

Соотношения (III.15), (III.16), (III.19), (III.20) и (III.24), наряду с условием аддитивности (III.18), позволяют при заданном химсоставе газа определить зависимость давления и внутренней энергии от температуры и плотности, т.е. уравнение состояния. После этого, с помощью формул (III.7)-(III.9), можно получить выражения и для термодинамических производных c_V , c_P , γ и ∇_{ad} .

Поясним сказанное на примере частично ионизованной водородной плазмы, которая представляет собой смесь трех сортов частиц: атомов H, протонов и электронов. Примем, что внутренняя энергия свободных протонов и электронов равна нулю, а все атомы водорода находятся только в основном состоянии. Тогда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_e = 0, \quad \varepsilon_0 = -\chi_H, \quad g_0 = g_e = 2, \quad g_1 = 1,$$

где $\chi_H \approx 13.6$ эВ – потенциал ионизации водорода.

Соотношения, описывающие условие электронейтральности и связь плотности и числа частиц, имеют простой вид:

$$N_1 = N_e, \quad \rho = m_u \cdot (N_0 + N_1). \quad (\text{III.25})$$

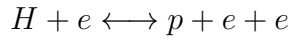
Следовательно,

$$P = (N_0 + N_1 + N_e)kT, \quad \rho \cdot E = \frac{3}{2}(N_0 + N_1 + N_e)kT - N_0\chi_H. \quad (\text{III.26})$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$P = \frac{\rho \Re T}{\mu}, \quad \text{где } \mu = \frac{N_0 + N_1}{N_0 + 2N_1} \text{ и } \Re \equiv \frac{k}{m_H} \approx 8.31 \cdot 10^7 \text{ эрг/г/К} \quad (\text{III.27})$$

Для реакции



(ионизация электронным ударом \longleftrightarrow трехчастичная рекомбинация), согласно (III.24), имеем:

$$\eta_H + \eta_e = \eta_1 + 2\eta_e, \quad \text{т.е.} \quad \eta_H = \eta_1 + \eta_e. \quad (\text{III.28})$$

Отсюда, с учетом выражения (III.23), получается формула Саха (M.Saha, 1920), связывающая концентрации атомов H, протонов и электронов (см. Задачу III.2):

$$\frac{N_e N_1}{N_0} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi_H}{kT} \right). \quad (\text{III.29})$$

Введем параметр $x \equiv N_1/(N_0 + N_1)$, характеризующий степень ионизации водорода: $0 \leq x \leq 1$, так что случай $x = 0$ соответствует нейтральному газу, а случай $x = 1$ – полностью ионизованной плазме. Тогда с учетом (III.25) получим:

$$N_1 = N_e = \frac{x\rho}{m_u}, \quad N_H = \frac{(1-x)\rho}{m_u}. \quad (\text{III.30})$$

Следовательно, согласно (III.27) молекулярный вес смеси атомарного и ионизованного водорода

$$\mu = \frac{N_0 + N_1}{N_0 + 2N_1} = \frac{1}{1+x},$$

т.е. $\mu = 1$ для нейтрального водорода и $\mu = 1/2$ для полностью ионизованной водородной плазмы, что, впрочем, непосредственно следует из определения (III.21).

Если подставить (III.30) в формулу Саха (III.29), то получим выражение, которое в неявном виде задает зависимость $x = x(\rho, T)$. Это позволяет вычислить производные $(\partial x / \partial T)_\rho$, и $(\partial x / \partial \rho)_T$.

С другой стороны, подстановка соотношений (III.30) в выражения для давления и внутренней энергии дает нам зависимость $P = P(\rho, T, x)$ и $E = E(\rho, T, x)$. Теперь

по общим формулам раздела III.2 можно получить выражения для термодинамических производных в случае частично ионизованного водорода. В частности, можно показать (см. Задачу III.3), что если обозначить:

$$B \equiv 1.5 + \frac{\chi_H}{k}, \quad \phi(x) \equiv \frac{x(1-x)}{(2-x)(1+x)},$$

то

$$\gamma = \frac{5}{3} - \frac{4\phi}{3} \frac{(\chi_H/kT)^2}{3 + 2B^2\phi}, \quad \nabla_{ad} = \frac{2}{5} \cdot \left[1 + \frac{2\phi}{5} \cdot \frac{\chi_H}{kT} \cdot \frac{1+B}{1+B\phi} \right]^{-1}. \quad (\text{III.31})$$

Так как $\phi \geq 0$, $B > 0$, получаем, что в зоне неполной ионизации $\gamma < 5/3$, $\nabla_{ad} < 0.4$.

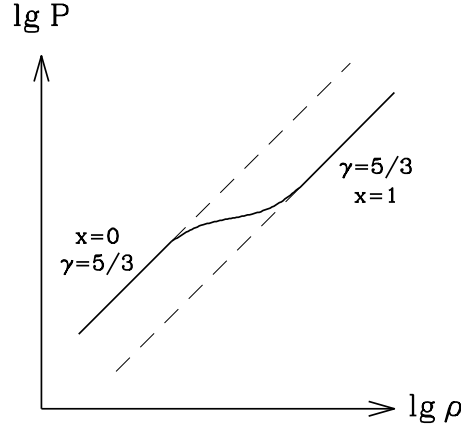


Рис. III.1: Качественный характер изменения показателя адиабаты γ в водороде при изменении степени ионизации $x \equiv N_1/(N_1 + N_0)$.

Как уже отмечалось, вещество звезды представляет собой смесь газов различных элементов. В основной массе звезды этот газ почти полностью ионизован. Получим выражения для некоторых термодинамических величин для случая полной ионизации.

Пусть $X\rho$, $Y\rho$ и $Z\rho$ — масса H, He и тяжелых элементов в см^3 . Величины X , Y и Z характеризуют относительное содержание (обилие) соответствующих элементов в веществе звезды. Относительное обилие какого-либо из элементов тяжелее гелия будем обозначать буквой X с нижним индексом, соответствующим химическому символу этого элемента, так что сумма X_i равна Z . Например, в фотосфере (!) Солнца $X = 0.70$, $Y = 0.28$, $Z = 0.02$, $X_C \approx 4 \cdot 10^{-4}$, $X_O \approx 8 \cdot 10^{-4}$, $X_{Fe} \approx 3 \cdot 10^{-5}$.

Массовое обилие элемента X_i связано с концентрацией ядер этого элемента N_i соотношением:

$$N_i = \frac{\rho X_i}{A_i m_u}, \quad (\text{III.32})$$

где m_u — атомная единица массы, а A_i — т.н. массовое число, равное числу нуклонов в ядре соответствующего элемента — см. стр. 64.

У элементов тяжелее гелия наибольшее обилие имеют изотопы, в ядрах которых число нейтронов и протонов либо одинаковое, либо почти одинаковое. Если массовое

число такого ядра равно A_i , то при полной ионизации появляется $A_i/2$ свободных электронов. Количество частиц в полностью ионизованном газе можно определить с помощью приведенной ниже таблицы, в которой буквой A обозначено среднее массовое число:

$$A = \sum_i A_i \frac{X_i}{Z},$$

которое зависит от относительного обилия тяжелых элементов в веществе звезды. В частности, для Солнца $A \approx 16$.

Таблица III.1: Число частиц при полной ионизации

Элемент	H	He	Тяжелые элементы
Число ядер	$X(\rho/m_u)$	$Y(\rho/4m_u)$	$Z(\rho/Am_u)$
Число e^-	$X(\rho/m_u)$	$2Y(\rho/4m_u)$	$A/2 \cdot (Z\rho/Am_u)$

Если пренебречь вкладом ядер тяжелых элементов, что оправдано, например, для звезд главной последовательности, то из таблицы получаем, что

$$P = \frac{\rho \Re T}{\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2X + 0.75Y + 0.5Z}. \quad (\text{III.33})$$

Поскольку $X + Y + Z = 1$, выражение для μ можно переписать в виде:

$$\mu = \frac{4}{3 + 5X - Z}. \quad (\text{III.34})$$

В частности, если принять обилие элементов таким же, как в фотосфере Солнца, то $\mu \approx 0.62$.

Иногда бывает удобно разделить вклад электронов и ядер. С помощью Табл. III.1 получим:

$$N_e = \frac{\rho}{m_u} (X + 0.5Y + 0.5Z) = \frac{\rho}{m_u \mu_e}, \quad \mu_e = \frac{2}{1 + X}. \quad (\text{III.35})$$

Нетрудно видеть, что μ_e — это число нуклонов (ρ/m_u), приходящееся на один электрон. Данное выражение для N_e является частным случаем уравнения электронейтральности (III.20) в пределе полной ионизации.

Теперь выражение для давления бoльцмановского электронного газа можно записать в виде:

$$P_e = N_e kT = \frac{\rho \Re T}{\mu_e}, \quad (\text{III.36})$$

Аналогичным образом с помощью Табл. III.1 получим, что при полной ионизации давление газа ядер (ионов) запишем в виде:

$$P_i = \frac{\rho \Re T}{\mu_i}, \quad \mu_i = \frac{4}{1 + 3X - Z}. \quad (\text{III.37})$$

Полное давление $P = P_i + P_e$, поэтому, сравнив (III.35), (III.37) с (III.34), получим:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e}. \quad (\text{III.38})$$

Отметим, что если уравнение состояния вещества в *политропной* звезде описывается законом (III.33), то переменная $\theta = [\rho/\rho_0]^{1/n}$ пропорциональна температуре газа, а точнее величине T/μ . Действительно, из соотношений $P \propto \rho^{1+1/n}$ и $P \propto \rho T/\mu$ следует, что $T/\mu \propto \rho^{1/n} = \rho_0^{1/n} \theta$. Таким образом в случае уравнения состояния (III.33) с $\mu = \text{const}$ политропную зависимость можно записать в виде:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/n}, \quad \text{или} \quad T = K' \rho^{1/n}, \quad \text{где} \quad K' = T_0 \rho_0^{-1/n}. \quad (\text{III.39})$$

Приведем выражение для удельной (т.е. в расчете на 1 г вещества) энтропии *полностью ионизованного* больцмановского газа, состоящего из смеси газов различных элементов и газа электронов. Для энтропии ядер имеем:

$$S_{ion} = \frac{1}{\rho} \cdot \sum_i s_i,$$

где суммирование выражений (III.17) для величин s_i должно проводиться по ионам водорода, гелия и тяжелых элементов. После тривиальных выкладок получим:

$$S_{ion} = \frac{\Re}{\mu_i} \ln \left(\frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + C_{ion}. \quad (\text{III.40})$$

Здесь μ_i – молекулярный вес смеси, вычисляемый по формуле (III.37), а C_{ion} – константа, величина которой определяется химическим составом смеси (см. Задачу III.6).

Выражение для удельной энтропии больцмановского газа электронов непосредственно получается из формулы (III.17) с учетом соотношения (III.35):

$$S_e = \frac{\Re}{\mu_e} \ln \left(\frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + C_e, \quad (\text{III.41})$$

С учетом (III.38) выражение для полной удельной энтропии можно записать в виде:

$$S = S_{ion} + S_e = \frac{\Re}{\mu} \ln \left(\frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + \text{const}. \quad (\text{III.42})$$

При необходимости аналогичным образом следует учесть вклад нейтральных атомов и молекул. По форме получившееся выражение не будет отличаться от (III.42), но молекулярный вес смеси μ следует рассчитывать по общей формуле (III.21).

III.3.2 Чернотельное излучение

В недрах звезд излучение можно рассматривать, как термодинамически равновесный газ фотонов, которые представляют собой кванты электромагнитного излучения. Энергия кванта с частотой ν равна $h\nu$, а распределение квантов по частоте, т.е. количество квантов в единице объема с частотой от ν до $\nu + d\nu$ описывается статистикой Бозе [6]:

$$n_\nu d\nu = \frac{4\pi B_\nu}{c h \nu} d\nu, \quad (\text{III.43})$$

где B_ν – функция Планка:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (\text{III.44})$$

Интегрируя (III.43) по всем частотам от 0 до ∞ получим, что полное число фотонов чернотельного излучения в 1 см^3 равно:

$$N_\gamma \approx 21T^3. \quad (\text{III.45})$$

Если проинтегрировать по всем частота произведение $h\nu \cdot n_\nu$, а полученный результат разделить на плотность, то получим выражение для удельной (эрг/г) энергии чернотельного излучения:

$$E_r = \frac{aT^4}{\rho}, \quad (\text{III.46})$$

где $a \approx 7.55 \cdot 10^{-15} \text{ эрг см}^{-3} \text{ К}^{-4}$.

Внутри звезд всегда $E_r/c^2 \ll \rho$, т.е. основной вклад в плотность дают нуклоны, а не излучение. Вместе с тем, возможны ситуации, когда концентрация фотонов N_γ больше, чем суммарная концентрация нуклонов и электронов $N = \rho/\mu/m_u$ – см. (III.19) и (III.21). Примером может служить центральная область звезды с массой $130 M_\odot$ – убедитесь в этом самостоятельно, определив с помощью таблицы III.2 отношение N/N_γ в этом случае.

Давление чернотельного излучения равно:

$$P_r = \frac{a}{3}T^4, \quad (\text{III.47})$$

а удельная энтропия и химический потенциал соответственно равны (см. Задачу III.10) :

$$S_r = \frac{4aT^3}{3\rho}, \quad \eta_r = 0. \quad (\text{III.48})$$

Для смеси газа и чернотельного излучения имеем:

$$P = P_g + P_r = \frac{\rho \Re T}{\mu} + \frac{aT^4}{3}, \quad E = E_g + E_r = \frac{3\Re T}{2\mu} + \frac{aT^4}{\rho}. \quad (\text{III.49})$$

Обозначим

$$\beta \equiv \frac{P_g}{P_g + P_r}.$$

Тогда вне зон ионизации ($\mu = \text{const}$) :

$$\gamma = \beta + \frac{2}{3} \frac{(4 - 3\beta)^2}{8 - 7\beta}, \quad \Rightarrow \quad \gamma(1) = \frac{5}{3}, \quad \gamma(0) = \frac{4}{3}. \quad (\text{III.50})$$

$$C_V = \frac{3P}{2\rho T} (8 - 7\beta), \quad \Rightarrow \quad C_V(1) = \frac{3}{2} \frac{\Re}{\mu}, \quad C_V(0) = \frac{4aT^3}{\rho}. \quad (\text{III.51})$$

$$C_P = \frac{3P}{2\rho T} (8 - 7\beta) + \frac{P^2 \mu}{\Re \rho^2 T^2} (4 - 3\beta)^2 \implies C_P(1) = \frac{5\Re}{2\mu}, \quad C_P(0) = \frac{4aT^3}{\rho} + \frac{16a^2 T^2 \mu}{9\Re \rho^2}. \quad (\text{III.52})$$

$$\nabla_{ad} = \frac{2(4 - 3\beta)}{32 - 24\beta - 3\beta^2} \implies \nabla_{ad}(1) = \frac{2}{5}, \quad \nabla_{ad}(0) = \frac{1}{4}. \quad (\text{III.53})$$

Скорость звука в газе, состоящем из смеси частиц и фотонов, согласно (III.10), равна:

$$V_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P_g}{\beta \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \Re T}{\mu \beta}} = \frac{V_s(1)}{\beta^{1/2}}, \quad (\text{III.54})$$

где $V_s(1)$ – скорость звука в газе, состоящем только из частиц. Из (III.54) следует, что если $\beta \rightarrow 0$, то $V_s(\beta) \rightarrow \infty$ и может превышать скорость света. Этот результат противоречит специальной теории относительности и является следствием того, что при выводе формулы мы пренебрегли вкладом фотонного газа в плотность – см. Задачу III.11.

Условию $P_g = P_r$, т.е. $\beta = 0.5$ (при $\mu = 1$) соответствует граница:

$$\lg T = 7.50 + \frac{1}{3} \lg \rho. \quad (\text{III.55})$$

Чем больше масса звезды, тем большую роль играет давление излучения в ее центральных областях. Действительно, из соотношений (II.30) и (II.34) следует, что $\rho_0 \propto M/R^3$ и $T_0 \propto M/R$, поэтому

$$\left(\frac{P_r}{P_g} \right)_0 \propto \frac{T_0^3}{\rho_0} \propto M^2. \quad (\text{III.56})$$

Таблица III.2: Давление излучения в центре звезд НГП с $X=0.7$ и $Z=0.03$

M/M_\odot	$T_c, 10^7 K$	$\rho_c, \text{ г/см}^3$	P_r/P	Ссылка
1	1.4	90	< 0.001	Iben I., ApJ 147, 624, 1967
5	2.7	18	0.02	Iben I., ApJ 143, 483, 1966
15	3.2	5.3	0.10	Ziolkowski J., Acta Astron. 22, 327, 1972
60	3.9	2.0	0.36	Ziolkowski J., Acta Astron. 22, 327, 1972
130	4.3	1.3	0.52	Apenzeller I., A&A 5, 355, 1970

Тепловая энергия звезд, состоящих из невырожденного газа есть

$$Q = \int_0^M \left(\frac{3\Re T}{2\mu} + 3 \frac{P_r}{\rho} \right) dm.$$

Из теоремы вириала

$$U = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = - \int_0^M \left(3 \frac{\Re T}{\mu} + 3 \frac{P_r}{\rho} \right) dm.$$

Поэтому полная энергия звезды

$$E_{tot} = Q + U = - \int_0^M \frac{3\Re T}{2\mu} dm = \frac{1}{2} \bar{\beta} U,$$

т.е. звезда гравитационно связана, но эта связь определяется лишь веществом – это следствие условия $E_{rad}/c^2 \ll \rho$.

III.3.3 Образование электрон-позитронных пар

Когда T становится $\sim m_e c^2/k \approx 6 \cdot 10^9$ К, возможен процесс $\gamma \longleftrightarrow e^- + e^+$.

Уравнение электронейтральности принимает вид:

$$\frac{\rho}{m_u \mu_e} = N_- - N_+. \quad (\text{III.57})$$

Если $\beta \ll 1$ и $T \geq 6 \cdot 10^9$ К, то $N_- \approx N_+$ и

$$P_{r+p} = \left(\frac{1}{3} + \frac{11}{12} \right) aT^4; \quad E_{r+p} = \left(1 + \frac{7}{4} \right) \frac{aT^4}{\rho}; \quad (\text{III.58})$$

Вывод этого соотношения приведен в [6], см. также стр.60 ниже.

При рождении пар γ становится $< 4/3$ – это основная причина, по которой невозможно существование сверхмассивных ($M \sim 10^6 M_\odot$) звезд.

Задачи

Задача III.1. Определить среднюю скорость теплового движения протонов и электронов в центре Солнца, приняв $T_0^\odot \approx 1.5 \cdot 10^7$ К.

Задача III.2. Вывести уравнение Саха (III.29)

Задача III.3. Вывести соотношения (III.31)

Задача III.4. Показать, что молекулярный вес газа, состоящего из смеси атомов водорода и гелия, а также молекул водорода H_2 , вычисляется по формуле:

$$\mu = \frac{4(1+x)}{4X+Y(1+x)}, \quad (\text{III.59})$$

где X и Y – массовое обилие водорода и гелия соответственно, а x – доля водородных молекул по отношению к общему числу частиц водорода (атомов + молекул).

Задача III.5. Определить объемную концентрацию электронов в центре Солнца, полагая $\rho_0 \approx 100$ г/см³, $X_0 \approx 0.5$.

Задача III.6. Показать, что энтропия 1 г полностью ионизованного гелия равна

$$S = \frac{\Re}{\mu} \ln \left(\frac{T^{3/2}}{\rho} \right) + C_\alpha, \quad (\text{III.60})$$

где $\mu = 4/3$ – молекулярный вес гелия, а величина C_α определяется соотношением:

$$C = \Re \left[\frac{5}{2} + \ln 2 + \ln g + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi k}{h^2} \right) + \frac{9}{8} \ln m_\alpha + \frac{3}{4} \ln m_e \right].$$

Задача III.7. Исходя из выражения (III.42) для удельной энтропии больцмановского газа с постоянным молекулярным весом μ показать, что показатель адиабаты такого газа $\gamma = 5/3$.

Задача III.8. Докажите, что у политропных звезд, состоящих из газа с уравнением состояния (III.49) и постоянной величиной μ , отношение $\delta = P_r/P_g$ убывает от центра наружу при $n < 3$ и возрастает при $n > 3$.

Задача III.9. Исходя из выражения (III.48) для удельной энтропии чернотельного излучения показать, что показатель адиабаты фотонного газа $\gamma = 4/3$.

Задача III.10. С помощью соотношения (III.24) для реакций (III.2) и (III.3) покажите, что химический потенциал чернотельного излучения равен 0.

Задача III.11. Показать, что скорость звука в фотонном газе

$$V_s = \frac{2}{3} c.$$

Задача III.12. Оцените наибольшую массу изотермического гелиевого ядра (core) звезды M_c^{max} , ниже которой расчет максимального давления (II.46) на внешней границе ядра возможен без учета вклада излучения.

Глава IV

Уравнение состояния звездного вещества

Область "низких" температур

Вырождение электронного газа

Резонно предположить, что когда среднее расстояние между электронами станет меньше величины, сравнимой с длиной волны де Бройля электрона λ (L. de Broglie, 1923), на поведении электронного газа станут сказываться квантовые эффекты. Оценим, при каких условиях это произойдет, рассмотрев газ, в котором электроны движутся со скоростями много меньше скорости света. В этом случае масса покоя m_e , импульс p и кинетическая энергия ε электрона связаны соотношением: $\varepsilon = p^2/2m_e$. При этом для среднего значения кинетической энергии имеем соотношение: $\varepsilon = 1.5kT$, поэтому средний импульс электрона $p \approx (3m_e kT)^{1/2}$. С другой стороны, если в 1 см^3 имеется N_e электронов, то среднее расстояние между ними $l \approx N_e^{-1/3}$, или, с учетом (III.35), $l \approx (\mu_e m_u / \rho)^{1/3}$. Полагая, что квантовые эффекты начнут сказываться, при $l \lesssim \lambda$ из соотношения неопределенности Гейзенберга (W. Heisenberg, 1927) $p \cdot \lambda \geq \hbar/2$ получим:

$$l \approx \left(\frac{\mu_e m_u}{\rho} \right)^{1/3} \lesssim \lambda \lesssim \frac{\hbar}{2p} \approx \frac{\hbar}{(3m_e kT)^{1/2}}.$$

Следовательно, квантовые эффекты следует учитывать, когда при данной плотности температура электронного газа меньше т.н. температуры Ферми:

$$T \lesssim T_F \approx \frac{\hbar^2}{12m_e k m_u^{2/3}} \cdot \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{2/3}.$$

Забегая вперед отметим, что полученная оценка T_F , практически совпадает с точным значением (IV.11), которое будет получено чуть позднее.

Пояснить на пальцах, почему появляется вырождение. Вырожденный = degenerate.

Пусть $f_e = f_e(\varepsilon)$ – вероятность обнаружить электрон в ячейке фазового пространства с энергией ε .

Если $T = 0$, то $f_e = 1$ при $\varepsilon < \varepsilon^{max} \equiv E_F$, и $f_e = 0$ при $\varepsilon > E_F$.

В этом случае число электронов равно числу энергетических состояний в элементе фазового пространства:

$$N_e dV = \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z dV = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp dV. \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{m_u \mu_e} = N_e = \int_0^{p_F} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad \Rightarrow$$

$$p_F = \frac{h}{2} \left(\frac{3\rho}{\pi m_u \mu_e} \right)^{1/3} \approx m_e c \cdot \left(\frac{\rho}{10^6 \mu_e} \right)^{1/3}. \quad (IV.1)$$

$$P_e = \int_0^{p_F} p_x v_x \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp, \quad (IV.2)$$

$$\rho \cdot E_e = \int_0^{p_F} \varepsilon \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp, \quad (IV.3)$$

где $p = m_e v (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ и $\varepsilon = (p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}$, причем $p_x v_x = pv/3$ — см. Задачу IV.1.

Если обозначить $x = p/m_e c$ и $x_F = p_F/m_e c$, то $v = cx/\sqrt{1+x^2}$. Тогда

$$P_e = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx = P_e^0 \cdot f(x_F), \quad (IV.4)$$

где

$$P_e^0 \equiv \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3}, \quad f(x) \equiv (2x^3 - 3x) \sqrt{1+x^2} + 3 \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

Для нас наиболее интересны предельные случаи этого выражения при $x_F \ll 1$ (нерелятивистский случай) и $x_F \gg 1$ (ультрарелятивистский случай). Нетрудно показать, что

$$f(x) = \begin{cases} 8x^5/5 & \text{при } x \ll 1; \\ 2x^4 & \text{при } x \gg 1. \end{cases}$$

С учетом (IV.1) имеем:

$$P_e = \begin{cases} 9.9 \cdot 10^{12} (\rho/\mu_e)^{5/3} & \text{при } \rho/\mu_e \ll 10^6 \text{ (нерелятивистское вырождение);} \\ 1.2 \cdot 10^{15} (\rho/\mu_e)^{4/3} & \text{при } \rho/\mu_e \gg 10^6 \text{ (ультрарелятивистское вырождение).} \end{cases} \quad (IV.5)$$

Если $v = p/m_e$ и $\varepsilon = p^2/2m_e$ (нерелятивистский газ), то

$$P_e^{nonr} = \frac{8\pi}{15m_e h^3} p_F^5 = 9.9 \cdot 10^{12} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad (IV.6)$$

$$E_e^{nonr} = \frac{3}{2} \frac{P_e}{\rho}. \text{ (без массы покоя!)} \quad (\text{IV.7})$$

Если $v \approx c$ и $\varepsilon = pc$ (ультрарелятивистский газ), то

$$P_e^{rel} = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 = 1.2 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}, \quad (\text{IV.8})$$

$$E_e^{rel} = 3 \frac{P_e^{rel}}{\rho}. \quad (\text{IV.9})$$

$P_e^{nonr} = P_e^{rel}$ при $\rho/\mu_e \approx 10^6$ г/см³.

Подставляя в (II.11) получим предельную массу белого карлика (БК):

$$M_{Ch} = \frac{5.75}{\mu_e^2} M_\odot.$$

Для He, C и O $\mu_e = 2 \longrightarrow M_{Ch} = 1.44 M_\odot$. Для Fe $\mu_e = 56/26 \longrightarrow M_{Ch}^{Fe} = 1.24 M_\odot$.

Из (II.9) следует, что при $\lg \rho_c \ll 7$ для холодных БК

$$M \propto \sqrt{\rho_c}, \quad R \propto 1/\rho_c^{1/6}.$$

При $T > 0$ среднее число заполнения ячеек фазового пространства

$$f_e = \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon - \eta}{kT} \right) \right]^{-1},$$

где η – химический потенциал электронного газа.

Тогда

$$N_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty f_e p^2 dp, \quad P_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty f_e p v p^2 dp, \quad E_e = \frac{8\pi}{\rho h^3} \int_0^\infty f_e \varepsilon p^2 dp. \quad (\text{IV.10})$$

Так как $N_e \equiv \rho/m_u \mu_e = F_1(T, \eta)$, $P_e = F_2(T, \eta)$, то мы имеем параметрическое задание уравнения состояния $P_e = F(\rho/\mu_e, T)$.

Удобные для расчетов аппроксимационные формулы приведены в работе [15]. В публикации имеется несколько опечаток, список которых приведен в [16].

Вырождение становится существенным при $T \geq T_F = \varepsilon_F/k$.

Для электронов: в нерелятивистском случае ($\varepsilon_F = p_F^2/2m_e$):

$$T_F = \frac{h^2}{8km_e} \left(\frac{3\rho}{\pi m_u \mu_e} \right)^{2/3} \approx 3 \cdot 10^5 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{2/3} K, \quad (\text{IV.11})$$

а в ультрарелятивистском ($\varepsilon_F = c p_F$):

$$T_F = \frac{ch}{2k} \left(\frac{3\rho}{\pi m_u \mu_e} \right)^{1/3} \approx 6 \cdot 10^7 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{1/3} K, \quad (\text{IV.12})$$

Отсюда, в частности, следует, что газ электронов в металлах вырожден при комнатной температуре!

Для протонов и нейтронов $T_F \approx 1.6 \cdot 10^3 \rho^{2/3} K \Rightarrow$ в звездах р-газ не вырожден!

Рассмотрим несколько частных случаев, которые могут быть получены из общих выражений (IV.10)

Пример 1. Температурные поправки при сильном вырождении ($T > 0$, $T/T_F \ll 1$).

В нерелятивистском случае:

$$P_e \approx 9.9 \cdot 10^{12} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]. \quad (\text{IV.13})$$

В ультрарелятивистском случае:

$$P_e \approx 1.2 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]. \quad (\text{IV.14})$$

Выражения для энтропии и теплоемкости электронного газа в нерелятивистском и в ультрарелятивистском случаях имеют одинаковый вид:

$$S_e \approx C_V \approx C_P \approx \pi^2 \frac{\Re}{\mu_e} \left(\frac{T}{T_F} \right), \quad (\text{IV.15})$$

однако выражения для T_F для этих случаев разные – (IV.11) и (IV.12) соответственно.

Отметим, что если электронный газ сильно вырожден, т.е. $T \ll T_F$, то его давление P_e намного превосходит давление газа ядер P_i . В самом деле, даже когда электронный газ не вырожден $P_e > P_i$ – см. стр.46. С другой стороны, используя определение T_F , выражения (IV.5) для P_e при $T = 0$ можно переписать в форме уравнения Клайперона-Менделеева:

$$P_e = \delta \cdot \frac{\rho \Re T_F}{\mu_e},$$

где $\delta = 2/5$ в нерелятивистском случае и $\delta = 1/4$ в ультрарелятивистском случае. Отсюда и следует, что при $T_F \gg T$ давление электронного газа будет много больше, чем P_i .

Однако теплоемкость вещества при сильном вырождении электронного газа определяется ионной компонентой – сравните выражения для теплоемкостей невырожденного газа ионов (III.51) и вырожденного газа электронов (IV.15). .

Пример 2. Рассмотрим ситуацию доминирования $e^+ - e^-$ пар.

При ЛТР $\eta_+ + \eta_- = \eta_\gamma = 0$, т.е. $\eta_+ = -\eta_-$. Если $N_- \approx N_+$, то

$$\int_0^\infty \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon - \eta}{kT} \right) \right]^{-1} p^2 dp = \int_0^\infty \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon + \eta}{kT} \right) \right]^{-1} p^2 dp; \implies \eta = 0 !$$

Тогда ($\varepsilon = pc$, $v = c$)

$$P_p = P_- + P_+ \approx 2 P_- \approx \frac{16\pi c^2}{m_e h^3} \int_0^\infty \left[1 + \exp \left(\frac{pc}{kT} \right) \right]^{-1} p^3 dp \propto T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1 + \exp(x)}.$$

Аналогично показывается, что $E_p \propto T^4$ – см. (III.16).

Пример 3. Почему существуют нейтронные звезды?

Свободный нейтрон распадается на протон, электрон и антинейтрино за характерное время $\sim 10^3$ с. Но когда $E_F > (m_n - m_p)c^2 \approx 1.3$ МэВ, то новому электрону нет места. Для релятивистских электронов $E_F = p_F c \approx 5.1 \cdot 10^{-3} (\rho/\mu_e)^{1/3}$ МэВ. Следовательно, при $\rho/\mu_e > 2 \cdot 10^7$ г/см³ нейтроны распадаться не могут.

IV.1 Влияние кулоновского взаимодействия на уравнение состояния

IV.1.1 Газ нейтральных частиц

Во внешних оболочках холодных звезд и планет при $T \leq 4000$ К вещество состоит из смеси атомов и молекул. Пусть N – концентрация частиц, а

$$\bar{l} \approx N^{-1/3} \sim 10^{-8}/\rho^{1/3} \text{ см}, \quad r_1 \sim 10^{-8} \text{ см}$$

среднее расстояние между частицами и характерный размер атома/молекулы соответственно. Тогда при $\bar{l} \leq 10 r_1$, т.е. при $\rho > 10^{-3}$ г/см⁻³ надо учитывать взаимодействие частиц друг с другом. С разумной точностью поведение газа в этих условиях описывается уравнением ван-дер-Ваальса:

$$P = \frac{N}{1 - bN} kT - aN,$$

где параметры a и b выбираются из условия наилучшего согласия с экспериментом.

Когда \bar{l} становится $\sim r_1$ происходит диссоциация, а затем и ионизация в результате уменьшения энергии связи электрона с "родительским" ядром – см. Задачу IV.4.

IV.1.2 Учет кулоновских взаимодействий в плазме

Пусть плазма состоит из ядер (A, Z) с концентрацией N_z и электронов с $N_e = ZN_z$. Среднее расстояние между ионами

$$l_i = N_z^{-1/3}. \quad (\text{IV.16})$$

Если бы заряды в плазме были распределены равномерно, то в среднем кулоновское взаимодействие было равно 0, и плазма была бы идеальным газом. Однако электроны концентрируются вблизи ионов, создавая область с размером r_D (радиус Дебая), внутри которой потенциал (при сравнительно малых плотностях) имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \quad \text{где} \quad r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi Z e^2 N_e}} \sim 10^{-11} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \text{ см}, \quad (\text{IV.17})$$

где e – заряд электрона. Заряды, удаленные от иона на $r \gg r_D$, практически, не оказывают на него влияния. Подчеркнем, что при высоких плотностях выражение для радиуса Дебая существенным образом отличается от приведенного – см., например, §17 в [1].

Мерой неидеальности плазмы служит безразмерное отношение Γ тепловой энергии частиц к энергии кулоновского взаимодействия между парой соседних зарядов:

$$E_K = \frac{Z^2 e^2}{l_i} \quad (\text{IV.18})$$

Соответственно имеем:

$$\Gamma = \frac{Z^2 e^2}{l_i k T} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{l_i}{r_D} \right)^2 \approx 10^5 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \frac{\rho^{1/3}}{T}.$$

В центре Солнца, например, $\Gamma \simeq 0.05$.

Если $\Gamma \ll 1$, то выражение для P и E имеет вид:

$$P = NkT \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{3} \Gamma^{3/2} \right), \quad \rho \cdot E = \frac{3}{2} NkT \left(1 - \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \Gamma^{3/2} \right).$$

При $\Gamma \sim 1$ вещество ведет себя, как жидкость, а при

$$\Gamma \geq \Gamma_m \approx 150, \quad \text{т.е. при} \quad T \leq T_m \approx 2 \cdot 10^3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \rho^{1/3}$$

ионы образуют кристаллическую решетку, внутри которой находится газ свободных электронов. Например, в центре углеродного ($Z = 6$, $A = 12$) белого карлика с $\lg \rho_c = 9$ кристаллическое ядро начинает формироваться, если $T < 3 \cdot 10^7$ К.

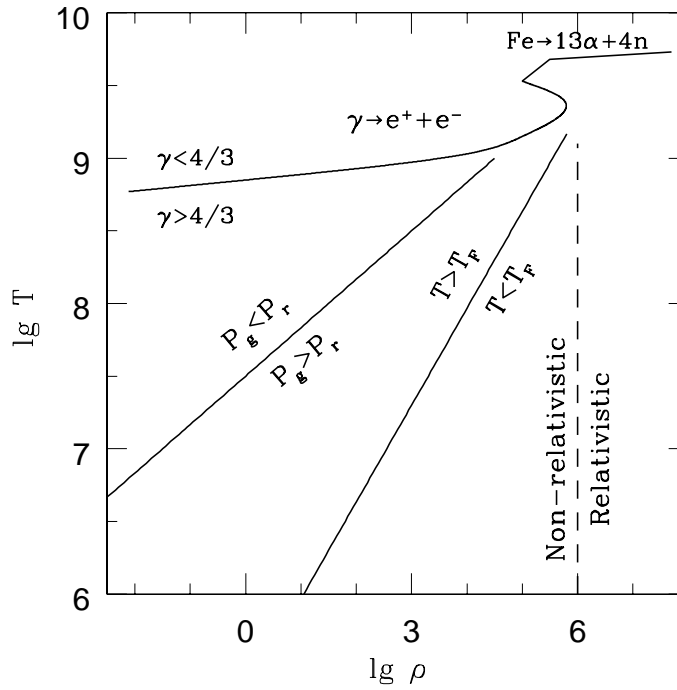


Рис. IV.1: Относительный вклад различных компонент в уравнение состояния. Также проведена линия, выше которой γ становится меньше $4/3$ за счет образования пар и фотодиссоциации Fe.

Задачи

Задача IV.1. Показать, что в выражении (IV.2) произведение $p_x v_x$ можно заменить на $pv/3$.

Задача IV.2. Оценить, начиная с какой минимальной массы изотермического гелиевого ядра звезды M_c^{min} расчет максимального давления (II.46) на внешней границе ядра возможен без учета вырождения электронного газа. Температуру ядра T принять равной $2 \cdot 10^7$ К.

Задача IV.3. Показать, что в вырожденном электронном газе влияние кулоновского взаимодействия не возрастает при увеличении плотности, как в случае бoльцмановского газа, а, наоборот, уменьшается.

Задача IV.4. Оценить степень ионизации водорода в центре Солнца по формуле Саха. Принять, что Солнце состоит только из водорода, а температура и плотность в его центре соответственно равны $1.5 \cdot 10^7$ К и 150 г/см^3 .

Глава V

Термоядерные реакции и β -процессы

V.1 Свойства атомных ядер и типы ядерных реакций

Приведем вначале общие сведения по физике атомного ядра, отсылая за подробностями к учебникам по ядерной физике, например, [9].

Ядро сорта i характеризуется зарядом Z_i (в единицах заряда протона) и его массой m_i или массовым числом $A_i = m_i/m_u$, где m_u – атомная единица массы – см. стр. 46. Z_i – целое число, равное порядковому номеру элемента i в таблице Менделеева и, одновременно, числу протонов в его ядре. Величина A_i , по определению, равна 12 для ядра $^{12}_6\text{C}$, а для всех остальных ядер – не целочисленная. Если округлить A_i до ближайшего целого числа A , то получим полное количество нуклонов в ядре i . Соответственно разность $A - Z_i$ равна числу нейтронов в этом ядре.

Размеры атомных ядер в десятки тысяч раз меньше характерного размера электронных орбит в атоме. Поэтому притяжение со стороны электронов не может компенсировать силу отталкивания, действующую между одноименно заряженными протонами в ядре. Разрушению атомных ядер препятствует особый вид взаимодействия между нуклонами (сильное взаимодействие), которое проявляется в ядрах как сила притяжения. Если ядро устойчиво, то это значит, что нуклонам энергетически выгодно быть связанными. Вследствие этого масса устойчивого ядра всегда меньше суммы масс нуклонов, из которых оно состоит, на величину потенциальной энергии связи ΔE_i , деленной на c^2 . Из соображений удобства в справочниках по ядерной физике часто приводят т.н. энергию связи на один нуклон, определяемую соотношением:

$$-\frac{\Delta E_i}{A} = \frac{Z m_p + (A - Z_i) m_n - m_i}{A} \cdot c^2. \quad (\text{V.1})$$

Ее типичное значение порядка нескольких МэВ –см. Табл. V.1.

При одинаковом расстоянии притяжение между двумя протонами такое же, как между двумя нейтронами, или между нейтроном и протоном – это свойство ядерных сил называется изотопической инвариантностью. Сила ядерного взаимодействия гораздо быстрее убывает с увеличением расстояния между нуклонами r , чем сила электростатического отталкивания протонов. В первом приближении энергия взаи-

Таблица V.1: Параметры нуклонов и некоторых атомных ядер [13]

Изотоп	A-Z	$\Delta E_i/A$, МэВ	m_i/m_u	Изотоп	A-Z	$\Delta E_i/A$, МэВ	m_i/m_u
n	1	0.0	1.008664	$^8_{16}\text{O}$	8	7.976206	15.994914
^1_1H	0	0.0	1.007825	$^8_{17}\text{O}$	9	7.750731	16.999131
^1_2H	1	1.112283	2.014101	$^9_{16}\text{F}$	7	6.963731	16.011465
^1_3H	2	2.827266	3.016049	$^9_{17}\text{F}$	8	7.542328	17.002095
^2_3He	1	2.572681	3.016029	$^{10}_{20}\text{Ne}$	10	8.032240	19.992440
^2_4He	2	7.073915	4.002603	$^{12}_{24}\text{Mg}$	12	8.260709	23.985041
^3_7Li	4	5.606291	7.016004	$^{14}_{28}\text{Si}$	14	8.447744	27.976926
^4_8Be	4	4.941672	8.005305	$^{16}_{32}\text{S}$	16	8.493134	31.972070
$^5_{12}\text{B}$	7	6.631264	12.014352	$^{18}_{36}\text{Ar}$	18	8.519909	35.967545
$^6_{12}\text{C}$	6	7.680144	12.000000	$^{20}_{40}\text{Ca}$	20	8.551301	39.962590
$^6_{13}\text{C}$	7	7.469849	13.003354	$^{22}_{44}\text{Ti}$	22	8.533518	43.959690
$^6_{14}\text{C}$	8	7.520319	14.003241	$^{24}_{48}\text{Cr}$	24	8.572210	47.954031
$^7_{13}\text{N}$	6	7.238863	13.005738	$^{25}_{56}\text{Mn}$	31	8.738300	55.938904
$^7_{14}\text{N}$	7	7.475614	14.003074	$^{26}_{52}\text{Fe}$	26	8.609598	51.948113
$^7_{15}\text{N}$	8	7.699459	15.000108	$^{26}_{56}\text{Fe}$	30	8.790323	55.934937
$^8_{15}\text{O}$	7	7.463692	15.003065	$^{28}_{56}\text{Ni}$	28	8.642709	55.942132

модействия двух нуклонов может быть записана в виде потенциала Юкавы:

$$\varphi_{nuc} \propto \frac{1}{r} \cdot \exp\left(-\frac{r}{r_n}\right), \quad (\text{V.2})$$

где $r_n \sim 10^{-13}$ см., однако, на самом деле, характер ядерных взаимодействий гораздо более сложный – см. [9].

Из соотношения (V.2) следует, что при $r > r_n \sim 10^{-13}$ см ядерное взаимодействие становится пренебрежимо малым. Поэтому нуклон притягивает к себе лишь ближайших соседей, тогда как протон "ощущает" силы отталкивания со стороны всех остальных протонов ядра. Поскольку нейтроны не испытывают отталкивания, а только притягивают к себе нуклоны, их присутствие делает ядра более прочными. Однако, если число нейтронов заметно превышает количество протонов, ядро в обычных условиях становится неустойчивым и распадается на ядра-осколки: классический пример – ядра всех изотопов урана.¹

Если представить ядро в виде сферы, состоящей из плотно упакованных шариков-нуклонов, то все эти "шарики" можно разделить на две категории: внутренние и поверхностные. Внутренние нуклоны окружены соседями со всех сторон, а у поверхностных с внешней стороны соседей нет. Силы притяжения в ядре действуют только

¹О ситуации, в которой "переобогащенные" нейтронами ядра оказываются устойчивыми, см. разделы, посвященные белым карликам и нейтронным звездам.

между соседними частицами, поэтому внутренние нуклоны крепче связаны с ядром, чем поверхностные. Следовательно, чем меньшая доля общего количества нуклонов находится на поверхности ядра, тем крепче ядро в целом.

Если заменить слово "ядро" на "капля жидкости", а слово "нуклон" – на "молекула", то окажется, что мы воспроизводим раздел школьного учебника физики, в котором объясняется, почему у жидкостей существует поверхностное натяжение – стремление свести к минимуму свою поверхность. Из схемы, изображенной на левой половине Рис. V.1 видно, что равнодействующая сил, приложенных к молекуле, находящейся на поверхности жидкости, направлена вглубь, а для молекул внутри жидкости равнодействующая равна нулю. По этой причине, в частности, две соприкоснувшиеся капельки воды сливаются в одну более крупную каплю. Процесс слияния капель сопровождается переходом части потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия в кинетическую энергию движения молекул, т.е. в тепло: температура воды немного увеличивается. Аналогия с каплей воды, предложенная в 1932 г. Нильсом Бором, позволяет понять, почему при тесном сближении двух легких ядер происходит их слияние, в результате которого образуется более тяжелое ядро нового элемента. Этот процесс называют либо ядерной реакцией синтеза, либо термоядерной реакцией, чтобы подчеркнуть, что слияние легких ядер сопровождается выделением энергии.

Однако сравнивая атомное ядро с каплей воды, мы не учли, что ядро имеет электрический заряд. Что происходит, когда соприкасаются две электрически заряженных капли? На правой половине Рис. V.1 показано, что пока заряд q мал, т.е. много меньше некоторого критического значения q_{cr} , приведенные в соприкосновение капли по-прежнему стремятся слиться, но чем больше суммарный заряд капелек, тем более сплюснутой оказывается форма образовавшейся капли. Это связано с тем, что стремясь отодвинуться друг от друга одноименные заряды тянут за собой молекулы воды, увеличивая площадь поверхности капли. Поэтому слияние заряженных капелек уже не столь выгодно с энергетической точки зрения, как это было в отсутствие заряда. Более того, начиная с некоторой величины заряда q_{cr} соприкасающиеся капельки вообще не станут сливаться, если только не приложить дополнительных усилий, т.е. не затратить на это энергию. А если заряд капелек сделать еще больше, то вскоре после того, как мы затратив энергию сольем маленькие капли, образовавшаяся капля развалится на фрагменты меньшего размера.

По сути дела, по тем же причинам слияние атомных ядер сопровождается выделением энергии только вплоть до образования ядра железа ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, у которого энергия связи на нуклон максимальна, а синтез ядер более тяжелых элементов, наоборот, отбирает у газа тепловую энергию. Поэтому ядерные реакции могут снабжать звезду тепловой энергией лишь до тех пор, пока все ядра легких элементов не превратятся в ядра железа – своего рода "ядерную золу". Элементы тяжелее железа синтезируются в недрах звезд только во время процессов взрывного характера, например, при вспышках сверхновых, когда быстрое сжатие звезды сопровождается выделением огромного количества тепла. Продолжая аналогию ядер с каплями жидкости отметим, что устойчивые ядра существуют вплоть до $Z = 82$ (свинец). Впрочем, ядро изотопа следующего элемента (висмут) ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ имеет настолько большой период полураспада ($\simeq 2 \cdot 10^{19}$ лет), что его можно считать практически стабильным.

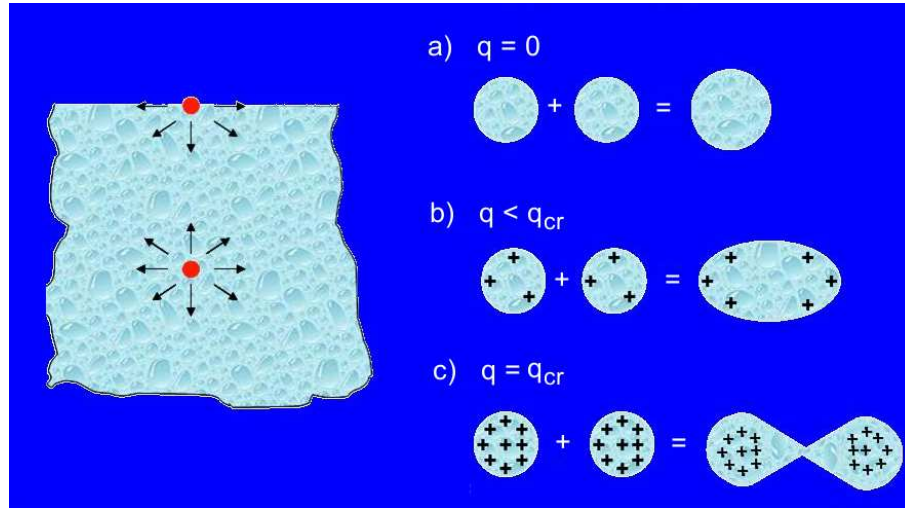


Рис. V.1: Капельная модель атомного ядра Бора. Подробности в тексте.

Как уже отмечалось на стр.60, свободный нейтрон – нестабильная частица: характерное время его жизни $\simeq 10^3$ секунд, после чего он распадается по схеме:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}. \quad (\text{V.3})$$

Однако в ядрах многих элементов нейтрон может существовать неограниченно долго, хотя есть ядра, неустойчивые по т.н. β^- распаду, как например, изотоп водорода тритий:

$$^3\text{H} \rightarrow ^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}, \quad (\text{V.4})$$

что, по сути дела, сводится к распаду одного из нейтронов ядра по схеме (V.3).

Если говорить о временах $t < 10^{32}$ лет, то протон – стабильная частица, однако в ядрах возможны т.н. β^+ -распады, как, например, в реакции

$$^1\text{H} + ^1\text{H} \rightarrow ^2\text{D} + e^+ + \nu. \quad (\text{V.5})$$

суть которой – превращение протона в нейтрон, позитрон e^+ и нейтрино. Свободный протон распадаться по такой схеме не может – это запрещено законом сохранения энергии: $m_p c^2 < m_n c^2$.

Различное поведение свободных и связанных в ядре нейтронов также объясняется законом сохранения энергии: если энергия исходного ядра $m_1 c^2$ в реакциях типа (V.4) и (V.5) меньше, чем конечного $m_2 c^2$, то β -распад происходить не может, а если больше, то исходное ядро неустойчиво по β -распаду.

При β -распаде выделяется энергия

$$Q_\beta = m_2 c^2 - m_1 c^2. \quad (\text{V.6})$$

В случае β^+ -распада величину Q_β следует увеличить на $m_e c^2 \simeq 0.511$ МэВ, поскольку возникающий позитрон практически мгновенно аннигилирует с электроном окружающей среды – см. Задачу V.1

Энерговыделение в одной реакции $A_1 + A_2 + \dots \rightarrow B_1 + B_2 + \dots$, где символами A_i обозначены ядра-реагенты, а символами B_k ядра-продукты реакции (без фотонов и лептонов), составляет:

$$Q_{ik} = \left(\sum_i m_{Ai} - \sum_k m_{Bk} \right) c^2. \quad (\text{V.7})$$

Как и в случае β^+ -распада величину Q_{ik} следует увеличить на $m_e c^2$, если в результате реакции образуется позитрон e^+ , как, например, в реакции (V.5).

При $Q_{ik} > 0$ реакция называется экзотермической, а при $Q_{ik} < 0$ – эндотермической. Когда мы говорим о выделении энергии в ядерных реакциях, то имеем ввиду суммарную кинетическую энергию ядер-продуктов реакции плюс энергию γ -квантов. По причинам, о которых будет сказано позднее, энергию нейтрино в величину Q_{ik} , как правило, не включают.

Количество тепла q_{ik} , которое выделяется при "сгорании" одного грамма "ядерного горючего" можно вычислить из следующих соображений. Пусть в каждой интересующей нас ядерной реакции принимают участие n ядер изотопа элемента, который мы будем называть "топливом". Например, если в качестве топлива рассматривать изотоп водорода ^1H , то в реакции (V.5) $n = 2$, а в реакции (V.8) $n = 1$. Поскольку масса ядра "сгорающего" изотопа $m \approx A \cdot m_u$, где A – его массовое число, то в одной реакции будет израсходовано $n \cdot A m_u$ г топлива, поэтому 1 г рассматриваемого ядерного топлива обеспечивает протекание $1/n A m$ реакций. Следовательно

$$q_{ik} = \frac{Q_{ik}}{n A m_u} \approx \frac{6 \cdot 10^{23} Q_{ik}}{n A}.$$

Величины q_{ik} для некоторых ядерных реакций, которые протекают в звездах, приведены в таблице V.2.

Таблица V.2: Теплотворная способность ядерного топлива

Изотоп	Реакция, ссылка	$q, 10^{18}$ эрг/г
^1H	$4 \text{H} \rightarrow \text{He}, \quad (\text{VI.2})$	7.5
^4He	$3 \text{He} \rightarrow \text{C}, \quad (\text{VI.5})$	0.60
^{12}C	$2 \text{C} \rightarrow \text{Mg}, \quad (\text{VI.6})$	0.55
^{14}Si	$\text{Si} + 7 \text{He} \rightarrow \text{Fe}, \quad (\text{VI.7})$	2.0

Запись



эквивалентна $^{15}\text{N}(p, \alpha)^{12}\text{C}$.

На Рис.V.2 схематически показаны энергетические уровни в составном ядре.

Реакции типа $^2\text{D}(^2\text{D}, p)^3\text{T}$ идут по сильному взаимодействию. $\sigma \sim \pi r_n^2 \sim 10^{-25} \text{ см}^2$.

В реакции $^2\text{D}(p, \gamma)^3\text{He}$ дополнительно участвует электромагнитное взаимодействие \Rightarrow вероятность взаимодействия домножается на множитель $e^2/\hbar c \simeq 1/137$.

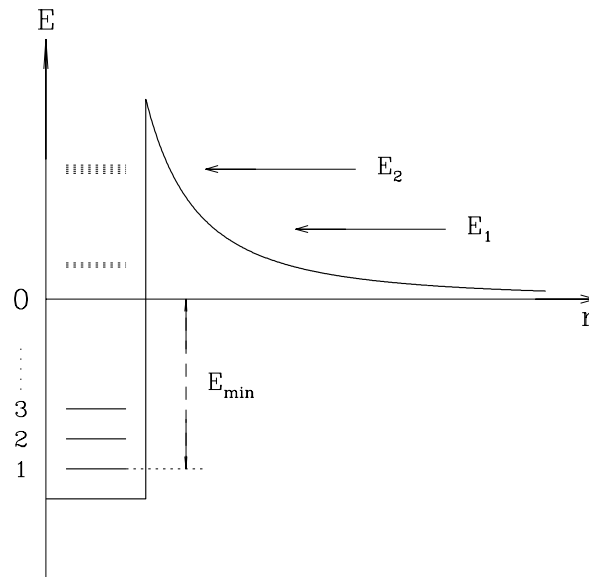


Рис. V.2: Схема энергетических уровней составного ядра. За ноль принята энергия двух покоящихся ядер, отстоящих друг от друга на бесконечно большое расстояние.

Реакция $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ – пример реакции слабого взаимодействия. На самом деле, это двухступенчатая реакция через виртуальный W -бозон:

$$n \rightarrow p + W^-, \quad W^- \rightarrow e + \bar{\nu}$$

Вероятность слабого взаимодействия мала из-за большой массы W^\pm и Z^0 бозонов ($\simeq 90$ ГэВ).

V.2 Скорость ядерных реакций

При описании взаимодействий частиц друг с другом и с квантами излучения фундаментальную роль играет понятие "сечение взаимодействия". Поясним физический смысл этого понятия, рассмотрев следующую ситуацию.

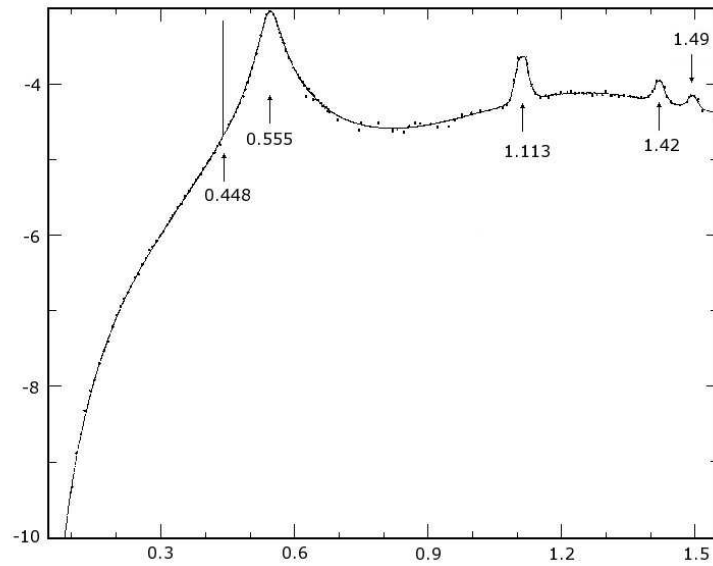


Рис. V.3: Зависимость логарифма сечения реакции $^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$ от энергии налетающего на мишень протона. Сечение выражено в барнах, а энергия в МэВ. Стрелками показаны положение резонансов – обратите внимание на узкий пик в районе $E = 0.448$ МэВ. [21]. В звездах данная реакция протекает при температурах $\sim 2 - 3$ кэВ.

Имеется частица-мишень, которая представляет собой часть плоскости, площадь которой равна σ – см. Рис.V.4. Справа налево в направлении, перпендикулярном поверхности мишени, движутся с одинаковой скоростью v_k другие частицы, число которых в единице объема равно N_k . Тогда за время dt в мишень попадут все частицы, которые находятся в цилиндре с площадью основания σ и высотой $v_k dt$, число которых равно $N_k \cdot \sigma v_k dt$. Следовательно, количество столкновений \mathcal{N}_k частиц-"снарядов" с одной частицей-мишенью в единицу времени будет равно

$$\mathcal{N}_k = N_k \sigma v_k, \quad \text{с}^{-1}. \quad (\text{V.9})$$

В данной ситуации сечение реакции взаимодействия (величина σ) имеет наглядную интерпретацию – это площадь поперечного сечения частицы-мишени. Но когда рассматривается реальное взаимодействие частиц друг с другом или с излучением, понятие "площадь поперечного сечения", как правило, вообще не имеет смысла: о какой площади можно говорить, например, рассматривая взаимодействие двух точечных зарядов или (точечного) электрона с плоской электромагнитной волной (площадь фронта бесконечна)? Однако для любой ситуации можно тем или иным способом определить количество актов взаимодействия в единицу времени, а затем использовать соотношение (V.9) для того, чтобы ввести понятие "эффективного сечения реакции":

$$\sigma \equiv \frac{\mathcal{N}_k}{N_k v_k}. \quad (\text{V.10})$$

При таком определении величины σ соотношение (V.9) выполняется автоматически,

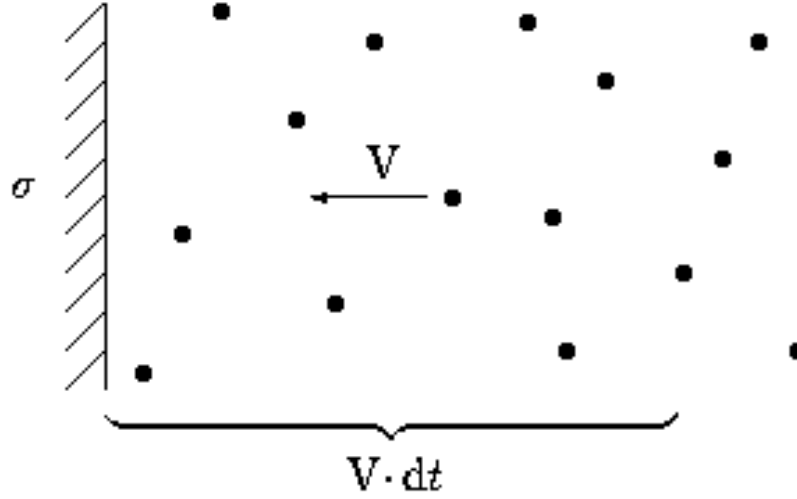


Рис. V.4: К выводу соотношения (V.9).

по определению. Размерность сечения – см^2 , но часто его выражают в барнах: 1 барн = 10^{-24} см^2 .

Получим соотношение, связывающее сечение взаимодействия с длиной свободного пробега l_{ik} , под которой подразумевается расстояние, проходимое частицей сорта k между двумя последовательными взаимодействиями с частицами-мишенями сорта i . За время $\Delta t_{ik} = l_{ik}/v_k$ произойдет одно взаимодействие между этими частицами, поэтому умножив обе части равенства (V.9) на Δt_{ik} получим: $1 \equiv \mathcal{N} \Delta t_{ik} = N_k \sigma v_k \cdot l_{ik}/v_k$, откуда следует, что

$$l_{ik} = \frac{1}{\sigma N_k}, \quad (\text{V.11})$$

$$\Delta t_{ik} = \frac{1}{\sigma N_k v_k}. \quad (\text{V.12})$$

Представление о длине свободного пробега столь же наглядно и интуитивно понятно, как и о числе взаимодействий в единицу времени, потому соотношения (V.9) и (V.11) с равным успехом можно использовать для определения понятия "сечение взаимодействия" – см. Задачу VII.1.

Сечение ядерных реакций зависит от относительной скорости движения v ядер, или, лучше сказать, от кинетической энергии их относительного движения E , поэтому необходимо рассматривать количество реакций относящееся к интервалу энергий от E до $E + dE$:

$$d\mathcal{N}_k = \sigma(E) v \cdot dN_k, \quad (\text{V.13})$$

где dN_k – количество ядер-снарядов в 1 см^3 , кинетическая энергия относительного движения которых лежит в том же энергетическом интервале. Если речь идет о лабораторном эксперименте, то интервал $E \div E + dE$ и dN_k определяются условием

эксперимента, а в недрах звезд величина $dN_k(E)$ задается распределением Максвелла (III.14).

Соотношение (III.14) справедливо в нерелятивистском приближении, что оправдано для данного случая. Действительно, энергия покоя ядра, выраженная в единицах температуры $Am_u c^2/k \sim A \cdot 10^{13}$ К, тогда как температура в центральных областях звезд никогда не превышает 10^{11} К. Следовательно нуклоны и ядра в недрах звезд – нерелятивистские частицы. Иными словами, импульс, кинетическая энергия, масса и скорость ядер связаны соотношениями:

$$p = mv, \quad E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (V.14)$$

Поскольку мы рассматриваем относительное движение ядер, вместо массы частицы в соотношения (V.14) следует поставить т.н. приведенную массу ядер i и k , т.е. [4]:

$$m = \frac{m_i m_k}{m_i + m_k} = \frac{A_i A_k}{A_i + A_k} m_u \equiv A_{ik} m_u. \quad (V.15)$$

Ядерные реакции могут протекать, если два ядра с зарядами Z_i и Z_k , преодолев кулоновское отталкивание, сблизятся на расстояние $r \leq r_n \sim 10^{-13}$ см. Согласно классической механике, в случае "лобового столкновения" это возможно, при условии, что кинетическая энергия относительного движения ядер на бесконечности E удовлетворяет условию:

$$E \geq E^0 = \frac{Z_i Z_k e^2}{r_n}. \quad (V.16)$$

Если $E < E^0$, то сблизившись до расстояния

$$r_s = \frac{Z_i Z_k e^2}{E} > r_n, \quad (V.17)$$

ядра остановятся, а затем полетят в обратном направлении. Происходит своего рода упругое отражение сталкивающихся частиц от кулоновского барьера – см. Рис.V.5.

Когда участвующие в реакции ядра образуют газ с температурой T , средняя кинетическая энергия частиц $E_{th} = 1.5kT$, и с помощью (V.16) можно оценить температуру, при которой в газе будут протекать ядерные реакции:

$$T_{nuc} \gtrsim \frac{Z_i Z_k e^2}{1.5 k r_n}. \quad (V.18)$$

В частности, для первой реакции протон-протонной цепочки (V.5), протекающей в солнечных недрах, получаем ($Z_i = Z_k = 1$): $T_{nuc} \sim 2 \cdot 10^{10}$ К, что на три порядка больше центральной температуры Солнца. Интегрируя (III.14) по E в пределах от $1.5kT \cdot 10^3$ до ∞ можно показать,² что доля частиц, энергия которых превышает

²Учитывая, что при $x \gg 1$

$$\int_x^\infty e^{-t^2} t^2 dt \simeq \frac{x e^{-x^2}}{2} \left(1 + \frac{1}{2x^2} \right).$$

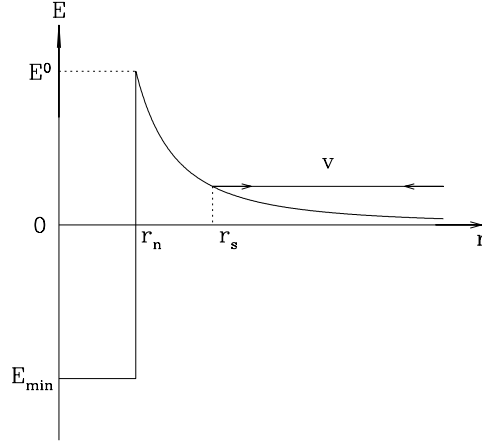


Рис. V.5: К выводу соотношения (V.17).

среднюю в 10^3 раз, $< 10^{-650}$. Но общее число частиц в составе Солнца $M_{\odot}/m_u \sim 10^{57}$, следовательно, с точки зрения классической физики, ядерные реакции не могут служить источником энергии Солнца: слишком мала доля частиц с энергией, превышающей высоту кулоновского барьера E^0 .

Выход из положения был найден после того, как Г.Гамов в 1928 г. показал, что в рамках *квантовой механики* в область $r \leq r_0$, т.е. за барьер, могут проникать даже частицы с $E < E^0$. В рассматриваемом случае вероятность подбарьерного перехода

$$P_G(E) \simeq \exp\left(-\sqrt{\frac{E_G}{E}}\right), \quad (\text{V.19})$$

где энергия Гамова

$$E_G = \frac{2\pi^2 e^4 m_u}{\hbar^2} Z_i^2 Z_k^2 A_{ik} \simeq 1.6 \cdot 10^{-6} Z_i^2 Z_k^2 A_{ik} \quad \text{эрг.} \quad (\text{V.20})$$

В рамках квантовой механики частицу, импульс которой равен p , следует рассматривать, как объект с характерным размером порядка волны де Бройля $\lambda = \hbar/p$. Поэтому для сталкивающихся ядер "поперечное сечение" столкновения σ можно оценить как:

$$\sigma \sim \pi \lambda^2 = \pi \left(\frac{\hbar}{p}\right)^2 = \frac{\pi \hbar^2}{2m_u A_{ik} E}. \quad (\text{V.21})$$

Подставив это соотношение в (V.13) мы найдем сколько столкновений $d\mathcal{N}_k$ в единицу времени испытывает одно ядро-мишень с ядрами-снарядами, энергия которых лежит в интервале $E \div E + dE$. Чтобы узнать, сколько из этих столкновений закончиться сближением ядер до расстояний $r < r_n$, нужно полученное значение $d\mathcal{N}_k$ умножить на вероятность подбарьерного перехода (V.19).

Однако удобнее включить множитель $P_G(E)$ в выражение для сечения (V.21), которое теперь запишется в виде:

$$\sigma \simeq \frac{\pi \hbar^2}{2m_u A_{ik} E} \cdot \exp \left(-\sqrt{\frac{E_G}{E}} \right). \quad (\text{V.22})$$

После того, как ядра сблизилась до расстояний $r < r_n$ возникает компаунд-ядро, которое с определенной вероятностью $P_N(E)$ превращается в интересующие нас ядра – конечные продукты рассматриваемой реакции. Например, при столкновении двух ядер дейтерия ${}^2\text{H}$ в газе с температурой $\sim 3 \cdot 10^6$ К примерно с одинаковой вероятностью $P_N \simeq 0.5$ может возникать либо ${}^3\text{H} + p$, либо ${}^3\text{He} + n$.

Подобно множителю $P_G(E)$ вероятность $P_N(E)$ принято включать в выражение для сечения и записывать его в форме:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp \left(-\sqrt{\frac{E_G}{E}} \right), \quad (\text{V.23})$$

где

$$S(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2m_u A_{ik}} \cdot P_N(E).$$

Как следует из (V.23) размерность т.н. S -фактора $\text{см}^2 \cdot \text{эрг}$.

В принципе, величину $S(E)$ можно было бы рассчитать теоретически, однако, из-за сложности ядерных взаимодействий это удастся сделать с достаточной точностью только для самой простой реакции (V.5). Для всех остальных реакций зависимость $S(E)$ определяют из лабораторных измерений. Но почему из эксперимента определяют $S(E)$, а не $\sigma(E)$?

Дело в том, что, в соответствии с (V.23) сечение, а, следовательно, и число ядерных реакций в единицу времени резко убывают с уменьшением энергии сталкивающихся ядер. Поэтому даже на ускорителях с наибольшей интенсивностью потока ("пучка") ядер-снарядов удастся измерять сечения при энергиях, которые, как минимум, в десятки раз больше, чем средняя тепловая энергия частиц в "термоядерных котлах" звезд – см. Рис.V.3 и V.6. ³ Экстраполяция экспериментальной зависимости $\sigma(E)$ в область низких энергий приводит к очень большой ошибке.

В то же время, как видно из Рис.V.7, зависимость S -фактора от энергии оказывается гораздо более пологой, поэтому экстраполяция тех же самых экспериментальных данных позволяет определить величину S , а, следовательно, и σ с гораздо меньшей ошибкой. По этой причине сечение и записывают в виде (V.23). Отметим, кстати, что на Рис.V.7 величина S -фактора приведена в удобных для экспериментаторов единицах: барн·МэВ.

³ Любопытно отметить, что сечение реакции (V.5) настолько мало, что наблюдать эту реакцию в лабораторных условиях до сих пор не удалось.

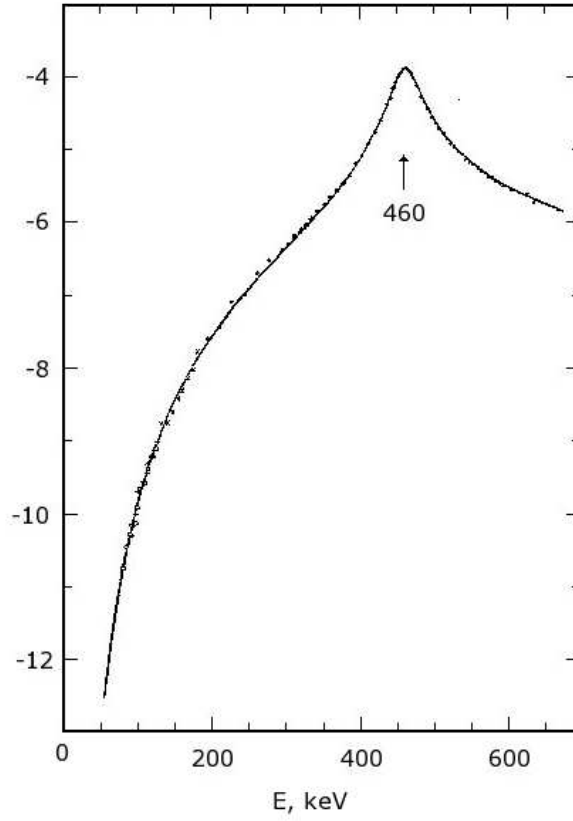


Рис. V.6: Зависимость логарифма сечения реакции $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ от энергии налетающего на мишень протона [21]. Сечение σ выражено в барнах. Стрелкой показано положение резонанса в районе $E = 0.46$ МэВ. В звездах данная реакция протекает при температурах $\sim 2 - 3$ кэВ.

Теперь можно определить общее количество ядерных реакций, которые происходят в веществе звезды за 1 секунду в расчете на одно ядро-мишень. Для этого следует проинтегрировать выражение (V.13) по энергии в пределах от 0 до ∞ , что, с учетом соотношений (III.14), (V.14), (V.15) и (V.23), дает:

$$\mathcal{N}_k = \left(\frac{8}{\pi m_u k^3} \right)^{1/2} \frac{N_k}{A_{ik}^{1/2} T^{3/2}} \cdot \int_0^\infty S(E) \cdot \exp \left(-\frac{E}{kT} - \frac{E_G^{1/2}}{E^{1/2}} \right) dE. \quad (\text{V.24})$$

Экспоненциальный множитель подинтегральной функции в (V.24) имеет довольно резкий максимум – т.н. пик Гамова. Ограничимся рассмотрением случая, когда в окрестности этого максимума зависимость $\sigma(E)$ не содержит узких пиков, обусловленных резонансами (нерезонансная реакция).⁴ Тогда основной вклад в интеграл будет давать область в окрестности максимума экспоненциального сомножителя, что позволяет оценить интеграл следующим образом (т.н. метод перевала).

⁴Резонансные реакции, а также β -распады и реакции ядер с нейтронами кратко рассмотрены в разделе V.3.

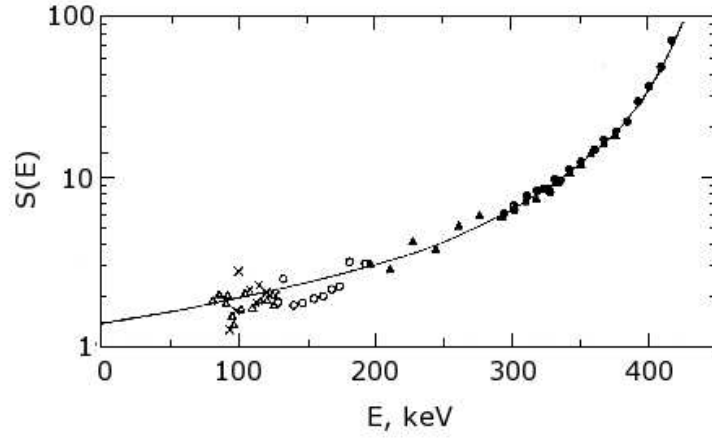


Рис. V.7: Зависимость от энергии S -фактора из соотношения (V.V.23) для реакции $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ [21]. S в единицах барн·МэВ.

Пусть

$$f(E) = -\frac{E}{kT} - \frac{E_G^{1/2}}{E^{1/2}}.$$

Тогда

$$f' = -\frac{1}{kT} + \frac{E_G^{1/2}}{2E^{3/2}}, \quad f'' = -\frac{3E_G^{1/2}}{4E^{5/2}}.$$

Функция $f(E)$ имеет максимум при $E = E_0$, которое определяется из условия $f' = 0$, что дает:

$$E_0 = \left(\frac{kT}{2}\right)^{2/3} E_G^{1/3} \simeq 2.0 \cdot 10^{-13} Z_i^{2/3} Z_k^{2/3} A_{ik}^{1/3} \text{ эрг}, \quad (\text{V.25})$$

$$f_0 \equiv f(E_0) = -3 \left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{1/3}, \quad f_0'' \equiv f''(E_0) = -\frac{3}{4} \left(\frac{2}{kT}\right)^{5/3} E_G^{-1/3}. \quad (\text{V.26})$$

В окрестности максимума $f(E) \simeq f_0 + 0.5 f_0'' (E - E_0)^2$. Тогда, полагая $S(E) \simeq S(E_0) \equiv S_0$ (нерезонансная реакция), получим:

$$\mathcal{N}_k \simeq \left(\frac{8}{\pi m_u k^3}\right)^{1/2} \frac{N_k S_0}{A_{ik}^{1/2} T^{3/2}} \cdot \exp \left[-3 \left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{1/3} \right] \cdot I. \quad (\text{V.27})$$

Символом I мы обозначили интеграл

$$\int_0^\infty \exp [0.5 f_0'' (E - E_0)^2] dE,$$

который подстановкой $x = \sqrt{-0.5 f_0''} \cdot (E - E_0)$, с учетом (V.26), сводится к виду:

$$I = \left(\frac{16E_G}{27} \right)^{1/6} (kT)^{5/6} \cdot \int_{-x_0}^{\infty} \exp(-x^2) dx, \quad (\text{V.28})$$

где

$$x_0 = E_0 \sqrt{-0.5 f_0''} = 0.5 \left(\frac{27E_G}{4kT} \right)^{1/6}$$

Как правило, $x_0 \gg 1$,⁵ поэтому нижний предел в интеграле (V.28) можно заменить на $-\infty$, и интеграл получается равным $\sqrt{\pi}$. Следовательно,

$$I = \sqrt{\pi} \left(\frac{16E_G}{27} \right)^{1/6} (kT)^{5/6}. \quad (\text{V.29})$$

Величину \mathcal{N}_k принято записывать в виде:

$$\mathcal{N}_k = N_k \langle \sigma v \rangle_{ik}, \quad (\text{V.30})$$

т.е. выделять из выражения (V.27) множитель N_k и подразумевать под величиной в угловых скобках усредненное по распределению Максвелла произведение σv . С учетом соотношений (V.20), (V.27) и (V.29) имеем:

$$\langle \sigma v \rangle_{ik} \simeq 8.1 \cdot 10^{17} \left(\frac{Z_i Z_k}{A_{ik}} \right)^{1/3} \frac{S_0}{T_6^{2/3}} \exp \left(-\frac{B}{T_6^{1/3}} \right), \quad B = 42.8 (Z_i^2 Z_k^2 A_{ik})^{1/3}. \quad (\text{V.31})$$

Количество ядерных реакций \mathcal{N}_{ik} , которые происходят в 1 см³ звездного вещества за 1 секунду, можно получить, умножив (V.30) на концентрацию ядер-мишеней в единице объема, т.е. на величину N_i . Если ядро-мишень и ядро-снаряд являются ядрами одного и того же элемента, как, например, в реакции (V.5), полученное значение \mathcal{N}_{ik} следует поделить на 2, иначе одно и то же ядро мы будем учитывать дважды: сначала, как мишень, а потом, как снаряд. Чтобы каждый раз не оговаривать это обстоятельство, в общую формулу вводят множитель $1/(1 + \delta_{ik})$, где δ_{ik} – символ Кронекера:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Таким образом имеем:

$$\mathcal{N}_{ik} = \frac{N_i N_k}{1 + \delta_{ik}} \langle \sigma v \rangle_{ik}. \quad (\text{V.32})$$

Если в одной реакции выделяется Q_{ik} эрг – см. (V.7), – то скорость энерговыделения в расчете на 1 грамм вещества (эрг $\text{г}^{-1} \text{с}^{-1}$) составит:

$$\varepsilon_{nuc} = \frac{\mathcal{N}_{ik} Q_{ik}}{\rho} = \frac{Q_{ik} N_i N_k}{\rho (1 + \delta_{ik})} \langle \sigma v \rangle_{ik} = \frac{Q_{ik} X_i X_k \rho}{(1 + \delta_{ik}) A_i A_k m_u} \cdot N_A \langle \sigma v \rangle_{ik}. \quad (\text{V.33})$$

⁵Убедитесь самостоятельно, что для реакции (V.5) в центре Солнца $x_0 \simeq 10^3$.

Последнее равенство вытекает из (III.32) и соотношения $N_A = 1/m_u$, где N_A – число Авогадро.

Зависимость $\langle\sigma v\rangle$ от T для ядерных реакций, представляющих интерес для астрофизики, можно найти, например, в книгах [1], [34], и на сайте [35].⁶

Объединяя (V.31) и (V.33), выражение для скорости генерации ядерной энергии запишем в виде:

$$\varepsilon_{nuc} = \varepsilon_0 X_i X_k \frac{\rho}{T^{2/3}} \exp\left(-\frac{B}{T^{1/3}}\right) = X_i X_k \rho F_{ik}(T), \quad (\text{V.34})$$

что позволяет наглядно проследить зависимость ε_{nuc} от плотности, температуры и (массовой) концентрации ядер, участвующих в рассматриваемой реакции, т.е. от величин, характеризующих структуру звезды.

Сравним энергию E_0 ядер, которые дают основной вклад в энерговыделение, со средней тепловой энергией частиц $E_{th} = 1.5kT$:

$$\frac{E_0}{E_{th}} \simeq 4.6 \left(\frac{A_{ik} Z_i^2 Z_k^2}{T_7} \right)^{1/3}, \quad (\text{V.35})$$

где $T_7 = T/10^7$. Для реакции (V.5) в центре Солнца ($A_{ik} = 0.5$), например, имеем: $E_0 \simeq 3E_{th} \simeq 10^{-8}$ эрг $\simeq 6$ кэВ.

Из (V.19) следует, что вероятность P_G этих частиц проникнуть сквозь барьер довольно велика: $\sim 3 \cdot 10^{-6}$, т.е. объяснить наличие термоядерных реакций в звездах, действительно, можно только в рамках квантовой механики.

V.3 Резонансные ядерные реакции и взаимодействие ядер с нейтронами

Как уже отмечалось, для многих реакций зависимость $\sigma(E)$ содержит довольно острые пики, обусловленные наличием возбужденных уровней (резонансов) – см. Рис.V.3, например. В этом случае метод оценки величины $\langle\sigma v\rangle_{ik}$, применявшийся для нерезонансных реакций, видоизменяют следующим образом. В выражение (V.23) для $\sigma(E)$ включают дополнительный множитель $\xi(E)$, описывающий форму резонансного пика. Как правило, в качестве $\xi(E)$ выбирают соотношение Брейта-Вигнера:

$$\xi = \frac{c_1}{(E - E_r)^2 + c_2}.$$

Энергию E_r , соответствующую максимуму пика, а также параметры c_1 и c_2 определяют из эксперимента.

Отсылая за подробностями вычислений соответствующего интеграла по энергиям к обзору [21] и/или книге [1], приведем лишь конечную формулу для удельной скорости энерговыделения (эрг $\text{г}^{-1} \text{с}^{-1}$) в случае резонансной реакции:

$$\varepsilon = A X_i X_k \frac{\rho}{T^{3/2}} \exp\left(-\frac{B}{T}\right). \quad (\text{V.36})$$

⁶В литературе принято приводить выражения для произведения $N_A \langle\sigma v\rangle$, поэтому этот член и выделен в формуле (V.33).

В указанной литературе приведены численные значения постоянных A и B для многих реакций. От аналогичного выражения (V.34) для нерезонансных реакций соотношение (V.36) отличаются показатели степени у температуры в экспоненте и в предэкспоненциальном множителе.

При температурах $T \geq 10^9$ К взаимодействие протонов и альфа-частиц с тяжелыми ядрами происходит через большое число перекрывающихся резонансов. В этом случае для вычисления величины ε используются аппроксимационные формулы, приведенные, например, в [22].

Основная особенность взаимодействия ядер со свободными нейтронами состоит в том, что нейтронам не нужно преодолевать кулоновский барьер. С точки зрения энергосыделения, реакции с нейтронами в звездах не играют сколь-нибудь существенной роли, однако они важны для синтеза многих изотопов различных элементов. Как и для заряженных частиц, взаимодействие ядер с нейтронами бывает резонансным и нерезонансным. Величины $\langle \sigma v \rangle_{in}$ для реакций обоих типов можно найти в [21], [23].

V.4 Электронное экранирование

В недрах звезд сталкивающиеся ядра взаимодействуют не только друг с другом, но и со свободными электронами окружающей их плазмы. В разделе IV.1.2 было отмечено, что в плазме происходит экранировка ионов облаком свободных электронов. Это приводит к тому, что сближение ионов до расстояний порядка радиуса Дебая происходит без затрат энергии, что облегчает прохождение кулоновского барьера и увеличивает вероятность ядерного взаимодействия.

В качестве примера рассмотрим столкновение двух протонов в центре Солнца. В разделе IV.1.2 мы нашли, что в этом случае кулоновские поправки малы, поэтому можно использовать выражение (IV.17), с помощью которого находим, что при $T = 1.5 \cdot 10^7$ К и $\rho = 100$ г/см³ радиус Дебая $r_D \sim 3 \cdot 10^{-9}$ см.

При отсутствии электронного экранирования кулоновское отталкивание протонов позволит им сближаться до расстояния r_s , определяемое соотношением (V.17). На стр. 78 мы нашли, что в случае центральных областей Солнца основной вклад в энергосыделение дают протоны с энергией $E \simeq 10^{-8}$ эрг, для которых r_s получается $\sim 3 \cdot 10^{-11}$ см.

Следовательно, наличие электронного экранирования на $r_D/r_s \simeq 1$ % уменьшает радиус остановки, что, как показывают расчеты, приводит к увеличению скорости энергосыделения ε_{nuc} на несколько процентов – см., например, §17 в [1].

Отношение r_D/r_s возрастает с ростом плотности, что существенно увеличивает скорость ядерных реакций, протекающих на поздних стадиях эволюции звезды, особенно в ее центральных областях. При очень высоких плотностях электронное экранирование приводит к тому, что скорость ядерных реакций почти не зависит от температуры, зато очень сильно от плотности – такие реакции называют пикноядерными. В частности, это происходит при горении углерода $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{24}\text{Mg}$, когда плотность приближается к величине $\simeq 10^{10}$ г/см³.

V.5 Эволюция химического состава звезды

Ядерные реакции не только служат источником энергии, но и меняют с течением времени химический состав вещества, что сказывается на его уравнении состояния и прозрачности для излучения. В этом разделе будут выведены уравнения, описывающие эволюцию химического состава звезды.

Предположим вначале, что в зоне, где происходят ядерные реакции, отсутствует конвекция. В этом случае нет перемешивания вещества, поэтому химический состав каждого элемента массы меняется только за счет происходящих *внутри него* ядерных превращений. Проследим за изменением массовой концентрации X_i одного из двух ядер, вступающих в ядерную реакцию.

В 1 г вещества содержится X_i грамм элемента i и $X_i/(A_i m_u)$ его ядер. В каждой ядерной реакции исчезает $1 + \delta_{ik}$ ядер сорта i , т.е. либо одно ядро, если ядра i и k принадлежат разным элементам, либо два ядра, если реакция происходит между ядрами одного и того же элемента. Поскольку за 1 секунду в 1 г вещества происходит ε_{nuc}/Q_{ik} ядерных реакций, то для изменения количества ядер в 1 г за время dt можно написать:

$$d \left[\frac{X_i}{A_i m_u} \right] = - \frac{\varepsilon_{nuc}}{Q_{ik}} (1 + \delta_{ik}) dt. \quad (V.37)$$

Тогда, подставляя (V.33), получим:

$$K_{ik}^i \equiv \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_m = - \frac{A_i m_u (1 + \delta_{ik})}{Q_{ik}} \varepsilon_{nuc} = - \frac{X_i X_k \rho}{(1 + \delta_{ik}) A_k} \cdot N_A \langle \sigma v \rangle_{ik}. \quad (V.38)$$

Здесь мы ввели обозначение K_{ik}^i для скорости изменения концентрации элемента i вследствие его взаимодействия *только* с ядрами элемента k . Как правило, к изменению концентрации X_i приводит сразу несколько ядерных реакций, причем реакции в которых ядро i является реагентом, уменьшают X_i , а реакции, где это же ядро является конечным продуктом, наоборот, увеличивают. Подробнее об этом будет сказано чуть позже, а пока отметим, что выражение для изменения концентрации X_k в реакции между ядрами i и k можно получить, поменяв поменяв местами индексы i и k в (V.38). В результате имеем:

$$K_{ik}^k = \frac{A_k}{A_i} \cdot K_{ik}^i. \quad (V.39)$$

Получим теперь выражения для скорости изменения концентрации ядер I и K , которые получаются *только* в результате столкновения ядер сорта i и k . Для ядер сорта j ($j = I$ или K) имеем:

$$d \left[\frac{X_j}{A_j m_u} \right] = + \frac{\varepsilon_{nuc}}{Q_{ik}} (1 + \delta_{IK}) dt.$$

Подставляя сюда (V.33) и сравнивая получившееся выражение с (V.38) находим:

$$K_{ik}^j = - \frac{A_j (1 + \delta_{IK})}{A_i} \cdot K_{ik}^i. \quad (V.40)$$

Фотоны и нейтрино также могут взаимодействовать с ядрами, либо рождаться в результате ядерных реакций. Однако соотношения (V.38)-(V.40) к этим частицам применять нельзя, поскольку для них не применимы рассуждения, на основании которых получено равенство (V.37).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда ядерные реакции происходят в области, где происходит конвекция. Как правило, время, за которое конвекция перемешивает вещество в области, где происходят термоядерные реакции, намного меньше времени, в течение которого эти реакции заметным образом меняют химический состав вещества – см. Главу VIII. Иными словами, в большинстве случаев конвекция настолько эффективно перемешивает вещество, что химический состав областей, охваченных конвекцией, оказывается одинаковым во всех точках.

Пусть масса области, охваченной конвекцией, равна M_{conv} . Для каждой единичной массы вещества внутри этой области справедливо соотношение (V.37). Проинтегрировав (V.37) по массе внутри зоны конвекции с учетом $X_i(m) = const$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{X_i}{A_i m_u} \int dm \right] = - \frac{(1 + \delta_{ik})}{Q_{ik}} \int \varepsilon_{ik} dm.$$

Поскольку $\int dm = M_{conv}$, получаем искомое соотношение:

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_m = \frac{A_i m_u (1 + \delta_{ik})}{Q_{ik} M_{conv}} \int \varepsilon_{nuc} dm. \quad (V.41)$$

Нетрудно видеть, что соотношения между величинами $\partial X_j / \partial t$ ($j = k, K, I$) и $\partial X_i / \partial t$, как и при отсутствии конвекции, будут определяться формулами (V.39) и (V.40).

До сих пор мы говорили о ядерных реакциях, происходящих при столкновении двух ядер. Однако в химической эволюции звезды важную роль играют и реакции радиоактивного распада: без них был бы невозможен CNO-цикл, β -распад кобальта и никеля обеспечивает нагрев вещества оболочек сверхновых и т.д. Особенность радиоактивного распада в том, что на вероятность распада того или иного ядра не влияют внешние условия, а количество распадов за время dt в объеме, содержащем 1 г вещества, пропорционально количеству радиоактивных ядер в этом объеме. Следовательно:

$$d \left(\frac{X_i}{A_i m_u} \right) = - \frac{X_i}{A_i m_u} \cdot \frac{dt}{t_0},$$

где $1/t_0$ – коэффициент пропорциональности.

Отсюда получаем уравнение для изменения величины X_i с течением времени:

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_m = - \frac{X_i}{t_0}, \quad (V.42)$$

решение которого:

$$X_i(t) = X_i^0 \cdot \exp \left(- \frac{t}{t_0} \right), \quad (V.43)$$

где X_i^0 – массовая концентрация рассматриваемого вида ядер при $t = 0$.

Из формулы (V.43) видно, что t_0 – это время, за которое исходя концентрация уменьшается в e раз. Период полураспада, т.е. время, за которое исходная концентрация радиоактивных ядер уменьшается вдвое, $t_{1/2} = t_0 \cdot \ln 2$.

Удельная скорость энергосвечения (эрг $g^{-1} s^{-1}$) при β -распаде, очевидно, равна:

$$\varepsilon = \frac{X_i Q_\beta}{t_0 A_i m_u}, \quad (V.44)$$

где Q_β вычисляется по формуле (V.6).

В случае бинарных реакций соотношение (V.38) можно записать в форме, похожей на (V.42):

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_m = - \frac{X_i}{t_{ik}}, \quad (V.45)$$

если положить

$$t_{ik} = \frac{A_k (1 + \delta_{ik})}{\rho X_k \cdot N_A \langle \sigma v \rangle_{ik}}. \quad (V.46)$$

Определенная таким образом величина t_{ik} , в отличие от t_0 , не является постоянной, поскольку даже при неизменных значениях ρ и T концентрация X_k меняется с течением времени. Физический смысл t_{ik} – оценка характерного времени жизни ядра элемента i до момента, когда оно вступит в реакцию с ядром элемента k – см. Задачу V.4.

Выше уже отмечалось, что типичной является ситуация, когда изменение концентрации X_i ядер изотопа элемента i происходит в результате одновременного протекания не одной, а нескольких ядерных реакций. При этом в каких-то реакциях происходит синтез ядер этого изотопа, а в других реакциях те же ядра являются реагентами, т.е. расходуются.

С учетом этого обстоятельства уравнение для изменения величины X_i можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_m = - \sum_a K_a^i + \sum_b K_b^i, \quad (V.47)$$

где K_j^i – скорость изменения X_i в ядерной реакции j . Первая сумма в правой части вычисляется по всем реакциям, в которых ядро i является реагентом, а вторая сумма – по реакциям, в которых ядро i синтезируется. Поскольку $\partial X_i / \partial t$ зависит от концентрации других ядер, аналогичные уравнения следует писать для всех ядер, принимающих участие в рассматриваемой совокупности ядерных реакций и совместно решать получившуюся систему уравнений.

В качестве примера рассмотрим ядерные реакции, протекающие по схеме $pp1$. Обозначим массовые концентрации водорода, дейтерия, ^3He и ^4He символами X_H , X_D , X_3 и X_4 соответственно, а производные $\partial X_i / \partial t$ символом \dot{X}_i . Примем, что в современную эпоху ($t = 0$) в межзвездной среде $X_H \simeq 0.75$, $X_D \simeq 2 \cdot 10^{-5}$, $X_3 \simeq 2 \cdot 10^{-5}$,

$X_4 \simeq 0.25$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dot{X}_H &= -\frac{X_H}{t_{HH}} \\ \dot{X}_D &= \frac{X_H}{t_{HH}} - \frac{X_D}{t_{HD}} \\ \dot{X}_3 &= \frac{X_D}{t_{HD}} - \frac{X_3}{t_{33}} \\ \dot{X}_4 &= \frac{X_3}{t_{33}}. \end{cases} \quad (\text{V.48})$$

Одно из уравнений этой системы избыточно. Действительно, сложив почленно все уравнения получим очевидный результат: $\dot{X}_H + \dot{X}_D + \dot{X}_3 + \dot{X}_4 = 0$, т.е. суммарное обилие всех ядер не меняется с течением времени. Поэтому одно (любое) уравнение системы можно заменить алгебраическим соотношением

$$X_H + X_D + X_3 + X_4 = X_H^0 + X_D^0 + X_3^0 + X_4^0.$$

Из определения характерного времени (V.46) получим:

$$t_{HH} = \frac{2}{\rho X_H N_A \langle \sigma v \rangle_{HH}}, \quad t_{HD} = \frac{2}{\rho X_H N_A \langle \sigma v \rangle_{HD}}, \quad t_{33} = \frac{6}{\rho X_3 N_A \langle \sigma v \rangle_{33}}.$$

Из первого и четвертого уравнений следует, что обилие водорода должно монотонно уменьшаться с течением времени ($\dot{X}_H < 0$), а обилие ${}^4_2\text{He}$, наоборот, монотонно возрастать ($\dot{X}_4 > 0$). Чтобы выяснить, как меняется обилие дейтерия, найдем отношение ξ_D первого и второго членов в правой части уравнения для \dot{X}_D :

$$\xi_D \equiv \frac{X_H t_{HD}}{X_D t_{HH}} = \frac{X_H}{X_D} \cdot \frac{\langle \sigma v \rangle_{HD}}{\langle \sigma v \rangle_{HH}}. \quad (\text{V.49})$$

Из Рис. VI.1 следует, что в интервале температур от 1 до 20 млн. градусов величина $\langle \sigma v \rangle_{HH}$ более чем на 16 порядков меньше величины $\langle \sigma v \rangle_{HD}$. Следовательно, пока концентрация дейтерия, а точнее отношение X_D/X_H , не станет меньше значения $\sim 10^{-16}$, величина ξ_D будет < 1 , а $\dot{X}_D < 0$. Поскольку исходное (при $t = 0$) отношение $X_D/X_H \simeq 4 \cdot 10^{-5}$, это значит, что обилие дейтерия должно уменьшаться до тех пор, пока величина X_D не упадет по сравнению с исходной более чем в 10^{11} раз. Отметим, что $t_{HH}/t_{HD} = \langle \sigma v \rangle_{HD}/\langle \sigma v \rangle_{HH} > 10^{16}$, поэтому за время, в течение которого концентрация дейтерия уменьшается по сравнению с исходной на много порядков, обилие водорода практически не меняется.

Расчеты эволюции звезд на стадии сжатия к главной последовательности, выполненные авторами [31], показывают, что у молодой звезды с массой $M = 1 M_\odot$ при возрасте 10^5 лет температура и плотность в центре равны $1.2 \cdot 10^6$ К и $3.5 \cdot 10^{-2}$ г/см³ соответственно. Из формулы (V.49) и Рис. VI.1 следует, что при таких значениях T и ρ характерное время выгорания дейтерия $t_{HD} \sim 3 \cdot 10^4$ лет.

Обратите внимание, что уравнения (V.38), (V.41) и (V.42) – это уравнения в частных производных: поскольку речь идет об изменении химического состава определенного элемента массы, то и производная по времени относится к точке внутри звезды, характеризуемой лагранжевой координатой m .

Напомним в этой связи, что уравнения закона сохранения массы (I.1) и гидростатического равновесия (I.12) описывали структуру звезды *в данный момент времени*. Поскольку до сих пор мы не рассматривали эволюцию звезды, молчаливо предполагалось, что входящие в эти уравнения величины зависят только от одной независимой переменной: r – при эйлеровом подходе, или m – при лагранжевом. Соответственно эти уравнения мы рассматривали, как обыкновенные дифференциальные уравнения.

Мы уже отметили, что уравнение состояния вещества и его прозрачность для излучения, а значит и структура звезды в данный момент времени зависят от химического состава звездного вещества. Ядерные реакции меняют химический состав с течением времени, поэтому звезда, сформировавшаяся из химически однородного газового облака, по мере эволюции становится все более и более химически неоднородной. Уже это обстоятельство (а есть и другие!), не позволяет рассчитать структуру звезды в какой-либо момент времени, не рассмотрев, как на предшествующих стадиях эволюции менялся химический состав ее внутренних областей.

Из сказанного следует, что уравнения, описывающие структуру и эволюцию звезды, взаимосвязаны. С математической точки зрения это означает, что уравнения закона сохранения массы (I.1) и гидростатического равновесия (I.12) – это уравнения в частных производных, и вместо $d.../dr$, или $d.../dm$, следовало бы писать $(\partial.../\partial r)_t$ или $(\partial.../\partial m)_t$ соответственно. Подробнее эту проблему мы обсудим в Главе IX.

V.6 Нейтринное излучение

Сечение рассеяния нейтрино веществом $\sigma_\nu \sim 3 \cdot 10^{-44} (E_\nu/\text{МэВ})^2 \text{ см}^2 \Rightarrow l_\nu \sim 10^{20}/\rho \text{ см}$.

Аннигиляция пар $e^- e^+$: $e^- + e^+ \longrightarrow \nu + \tilde{\nu}$.
Процесс эффективен при $T \sim T_* = 2m_e c^2/k \sim 10^{10} \text{ К}$. Тогда $\epsilon_\nu (\text{эрг/г/с}) \propto T^9 \exp(-T/T_*)$.

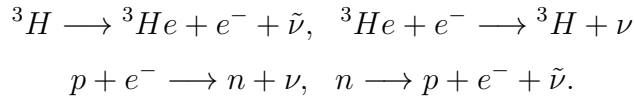
Свободно-свободное излучение на ядре (A,Z): $e^- + Z^+ \longrightarrow e^- + Z^+ + \nu + \tilde{\nu}$.
Процесс доминирует при высоких плотностях и при сравнительно низкой температуре: $\epsilon_\nu \simeq 0.8 Z^2/A T_8^6$

Фоторождение нейтрино: $e^- + \gamma \longrightarrow e^- + \nu + \tilde{\nu}$.
Процесс эффективен при $\rho < 10^4 \text{ г/см}^3$ и $T_8 = 1 \div 4$. Тогда $\epsilon_\nu \propto T^8$

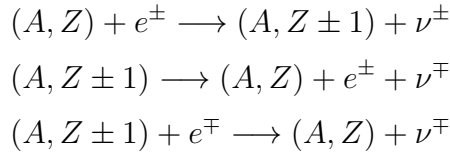
Плазменные нейтрино: $\Gamma \longrightarrow \nu + \tilde{\nu}$.
 $\omega_p^2 = 4\pi N_e e^2/m_e$. Процесс эффективен при высоких плотностях и $T_8 \sim 3$.

Урка процессы: Г.А.Гамов, М.Шенберг (1941) и В.С.Пинаев (1963).

Примеры:



В общем виде:



Процесс эффективен при средних и высоких плотностях и $T_9 > 1$, $\epsilon_\nu \propto T^6$.

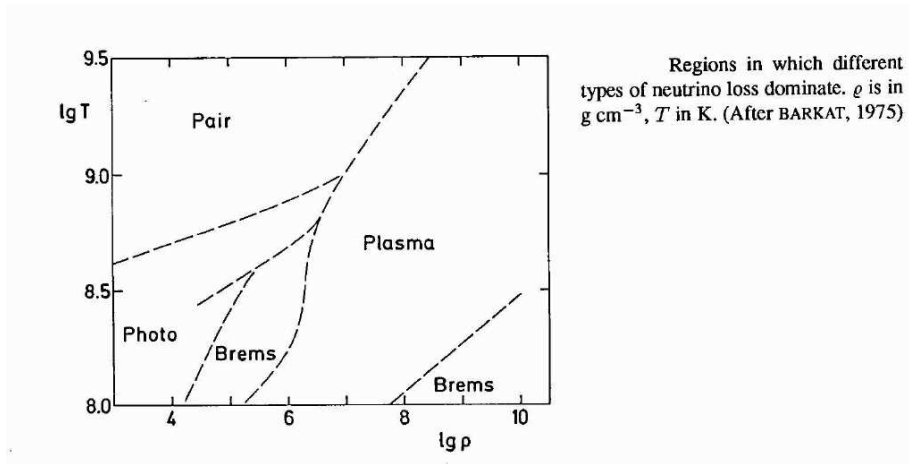


Рис. V.8: Роль различных процессов рождения нейтрино.

Задачи

Задача V.1. Почему в реакциях β^+ -распада или в реакциях синтеза, в которых рождается позитрон, энергетический выход нужно увеличить на $m_e c^2 \approx 511$ кэВ, а не на величину в 2 раза большую? Ведь при аннигиляции исчезает не только позитрон, но и электрон!

Задача V.2. Как известно, наблюдательным проявлением процесса аннигиляции является линия излучения с энергией $m_e c^2 \approx 511$ кэВ. Но при аннигиляции в излучение переходит энергия как электрона, так и позитрона, почему же соответствующая линия имеет энергию не в два раза большую?

Задача V.3. Используя табличные данные, приведенные на стр. 1 и 65, сравните энерговыделение в реакции синтеза дейтерия (V.5) с работой, которую следует совершить, чтобы сблизить два протона до расстояния $r_n \sim 10^{-13}$ см.

Задача V.4. Предположим, что в газе, плотность и температура которого не меняются со временем, протекает только ядерная реакция $p + p \rightarrow {}^2\text{D} + e^+ + \nu$. Показать, что в этом случае исходная концентрация ядер водорода X_p^0 уменьшается в 2 раза за время t_{pp} , определяемое формулой (V.46).

Глава VI

Термоядерные реакции в звездах.

VI.1 Протон-протонная цепочка реакций

В процессе рождения Вселенной, задолго до появления звезд происходил т.н. первичный нуклеосинтез. По причинам, о которых будет сказано в разделе XIV.3, в этом процессе в заметных количествах образовались изотопы только первых трех элементов таблицы Менделеева: водорода, гелия и лития. Стандартная модель Большого Взрыва предсказывает следующее обилие этих изотопов: ${}^1_1\text{H} - 0.75$, ${}^4_2\text{He} - 0.25$, ${}^2_1\text{H}$ (дейтерий) $- 3 \cdot 10^{-5}$, ${}^3_2\text{He} - 2 \cdot 10^{-5}$, ${}^7_3\text{Li} - 10^{-9}$, что хорошо согласуется с наблюдениями. Эти изотопы служат исходным материалом для последующего синтеза тяжелых элементов в звездах.

$${}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^2_1\text{D} + e^+ + \nu, \quad Q_{ik} = 1.44 - 0.25 = 1.19 \text{ МэВ}, \quad (\varepsilon_0 = 4.2 \cdot 10^{-15}, B_0 = 33.8;)$$
(VI.1)

$${}^2_1\text{D} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma, \quad Q_{ik} = 5.49 \text{ МэВ}, \quad (\varepsilon_0 = 4.0 \cdot 10^3, B_0 = 37.2;)$$

Далее в 86 % случаев на Солнце идет реакция:

$${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + 2p, \quad Q_{ik} = 12.86 \text{ МэВ}, \quad (\varepsilon_0 = 1.3 \cdot 10^{10}, B_0 = 122.8;)$$

В 14 % случаев – протекает цепочка реакций:

$${}^3_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \longrightarrow {}^7_4\text{Be} + \gamma, \quad {}^7_4\text{Be} + e^- \longrightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu, \quad {}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow 2{}^4_2\text{He}.$$

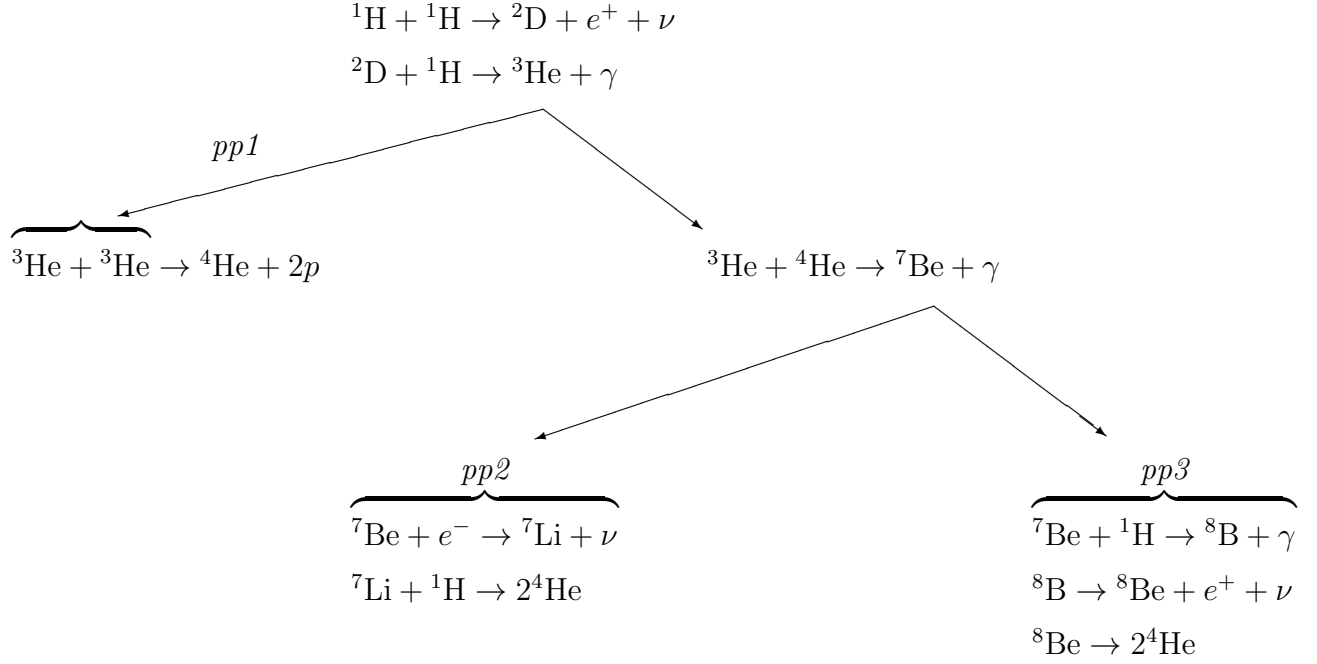
90 % нейтрино имеют энергию 0.86 МэВ и 10 % - 0.38 МэВ.

Наконец, в 0.02 % случаев рождаются нейтрино с $E_\nu = 14.06 \text{ МэВ}$:

$${}^7_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^8_5\text{B} + \gamma, \quad {}^8_5\text{B} \longrightarrow {}^8_4\text{Be} + e^+ + \nu, \quad {}^8_4\text{Be} \longrightarrow 2{}^4_2\text{He}$$

Обратите внимание, что если просуммировать все реакции каждой цепочки, то получается одинаковый результат:

$$4{}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu. \quad \text{(VI.2)}$$



Общее соотношение (V.34) для скорости энерговыделения в случае протон-протонной цепочки, согласно [26], можно с точностью не хуже 50 % записать в виде:

$$\varepsilon_{pp} \simeq 8 \cdot 10^5 g_{pp} \frac{\rho X^2}{T_7^{2/3}} \exp\left(-\frac{15.69}{T_7^{1/3}}\right) \frac{\text{эрг}}{\text{г с}}, \quad (\text{VI.3})$$

где X – обилие водорода, g_{pp} – фактор электронного экранирования, а $T_7 = T/10^7$. Сравнительно невысокая точность формулы связана с тем, что в зависимости от температуры и обилия гелия относительный вклад различных разветвлений цепочки в общее энерговыделение будет меняться. Что касается электронного экранирования, то в представляющих интерес случаях g_{pp} заметно отличается от 1 только для самых маломассивных звезд главной последовательности и коричневых карликов – см. [14].

Для центра Солнца ($X \simeq 0.4$, $T_7 \simeq 1.5$, $\rho = 150 \text{ г/см}^3$) формула (VI.3) дает: $\varepsilon_{pp}^\odot \simeq 20 \text{ эрг/г/с}$.

Метод Б.Понтекорво – Р.Дэвиса (Homestake, USA):

$$\nu_e + {}^{37}_{17}\text{Cl} \longleftrightarrow {}^{37}_{18}\text{Ar} + e^-, \quad E_\nu > 1.2 \text{ МэВ}, \quad t_{1/2} = 35^d, \quad F = 0.33 \pm 0.03.$$

Метод В.А.Кузьмина (SAGE, Россия + GALLEX, Italy):

$$\nu_e + {}^{71}_{31}\text{Ga} \longrightarrow {}^{71}_{32}\text{Ge} + e^-, \quad E_\nu > 0.23 \text{ МэВ}, \quad t_{1/2} = 11^d.$$

$$F_{\text{SAGE}} = 0.52 \pm 0.06, \quad F_{\text{GALLEX}} = 0.60 \pm 0.06.$$

Регистрация электронов отдачи при упругом рассеянии (Супер-Камиоканде, Япония):

$$\nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^-, \quad E_\nu > 6.5 \text{ МэВ}, \quad F = 0.47 \pm 0.02.$$

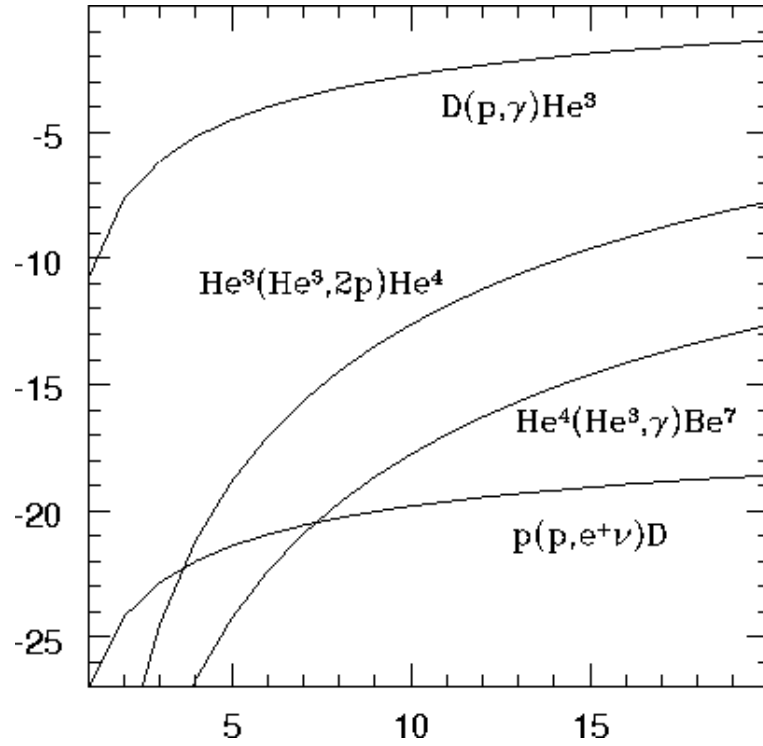
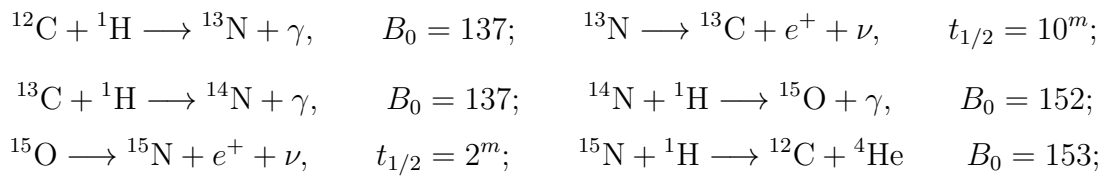


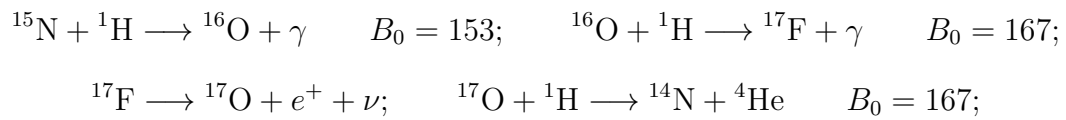
Рис. VI.1: Зависимость величины $\lg(N_A\langle\sigma v\rangle)$ от температуры (в единицах $T/10^6$) для некоторых основных реакций $p-p$ цепочки.

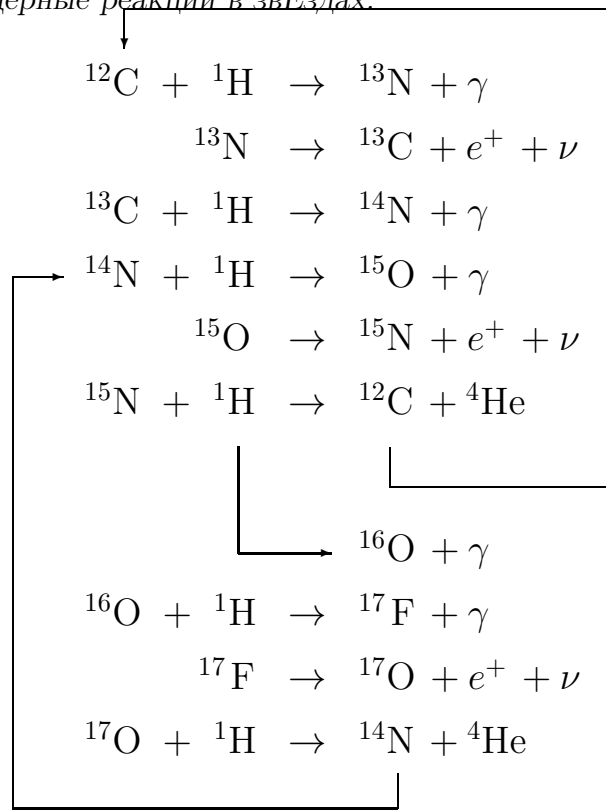
VI.2 CNO-цикл

Схема CNO-цикла.



Вместо последней реакции возможен процесс:





Углерод в CNO-цикле играет роль катализатора: ядро C, необходимое для начала процесса, вновь появляется в последней реакции цикла. Тем не менее обилие этого элемента уменьшается в сотни раз за время жизни звезды на главной последовательности, и вот по какой причине. Расчеты показывают, что из 6 реакций, образующих CNO-цикл, медленней всего протекает четвертая реакция: $^{14}\text{N} + p \rightarrow ^{16}\text{O}$. Это приводит к тому, что синтез ядер ^{14}N происходит гораздо быстрее, чем их превращение в ядра кислорода. Поэтому сразу после начала работы цикла количество ядер азота в зоне ядерных реакций начинает накапливаться за счет соответственного уменьшения количества ядер углерода. Но для звезды в целом скорость уменьшения общего числа ядер азота зависит не только от скорости протекания четвертой реакции цикла, но и от количества таких реакций, а оно будет расти по мере увеличения количества ядер азота в зоне, где эти реакции происходят. В какой-то момент ядер азота станет там настолько много, что за единицу в звезде будет синтезироваться и исчезать одинаковое число ядер ^{14}N – наступит т.н. кинетическое равновесие. Пятая и шестая реакции CNO-цикла протекают существенно быстрее четвертой реакции, поэтому можно сказать, что после исчезновения ядра ^{14}N цикл тут же завершается, и происходит рождение ядра ^{12}C (и ядра ^4He , разумеется) – цикл замыкается. Вновь появившиеся ядра углерода запускают новый виток цикла, и этот процесс повторяется до тех пор, пока весь водород не превратится в гелий. После того, как установится кинетическое равновесие относительное обилие азота и углерода уже не меняется с течением времени, но при этом оно радикально отличается от исходного: почти весь углерод превратился в азот. Время, за которое в звезде устанавливается кинетическое равновесие, гораздо меньше времени выгорания водорода, поэтому у звезд, покидающих

главную последовательность, содержание азота в центральной области в сотни раз больше, чем в оболочке.

В узком температурном интервале зависимость $\varepsilon_{nuc}(\rho, T)$ для бинарных реакций можно записать в виде:

$$\varepsilon_{nuc}^{ik} = \varepsilon_0 X_i X_k \rho (T/T_0)^s. \quad (\text{VI.4})$$

В частности, для случая горения водорода $X_i = X$, а $X_k = X_H$ в протон-протонной цепочке и $X_k = X_{CNO}$ в CNO-цикле. Поскольку из (VI.4) следует, что $s = (\partial \ln \varepsilon / \partial \ln T)_{\rho, X}$, с учетом (V.34), получим:

$$s = \frac{B}{3T^{1/3}} - \frac{2}{3}.$$

В Таблице VI.1 приведены значения s для случая горения водорода при некоторых значениях T .

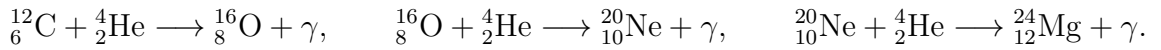
Таблица VI.1: Аппроксимация зависимостей $\varepsilon_{pp}(T)$ и $\varepsilon_{CNO}(T)$ степенной функцией

ε_{pp}			ε_{CNO}		
T_6	ε_0	s	T_6	ε_0	s
1	4.0-9	10.6	10	3.4-4	22.9
5	1.8-3	5.95	15	1.94	19.9
10	6.8-2	4.60	20	4.5+2	18.0
15	0.377	3.95	30	4.1+5	15.6
20	1.09	3.54	50	6.2+8	13.6
30	4.01	3.03	100	1.9+12	10.2

VI.3 Горение гелия и более тяжелых элементов



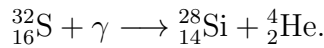
Возможны также реакции:

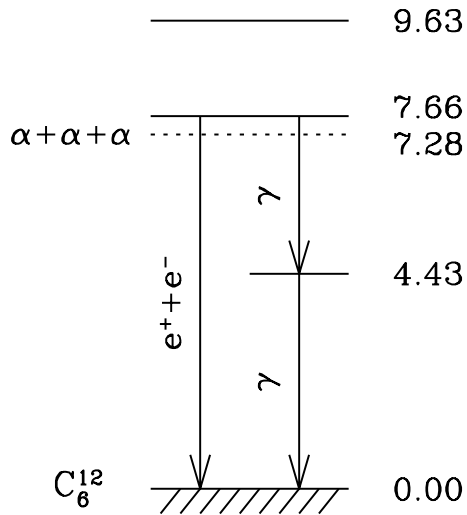


Но когда ядер ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ много, то уже мало ${}^4_2\text{He}$, поэтому более важную роль играют реакции типа:

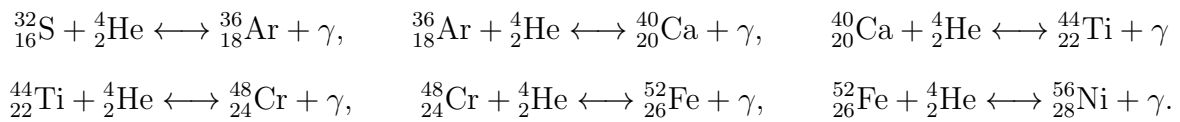


При $T \sim 10^9 \text{ К}$ имеется достаточно много γ -квантов с энергией $\sim \text{МэВ}$, которые вызывают фотодиссоциацию ядер, порождая реакции типа:

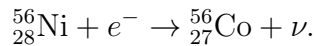


Рис. VI.2: Схема энергетических уровней ядра $^{12}_6\text{C}$.

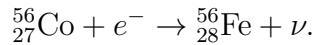
Возникающие при этом α -частицы реагируют и с другими ядрами, порождая, в конечном счете, элементы группы Fe:



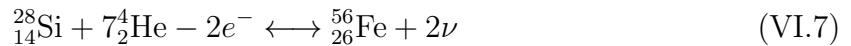
Ядро $^{56}_{28}\text{Ni}$ неустойчиво: оно захватывает электрон и превращается в ядро $^{56}_{27}\text{Co}$:



Ядро кобальта также неустойчиво относительно электронного захвата, что, в конечном итоге порождает "ядерную золу" – ядро $^{56}_{26}\text{Fe}$ с максимальной (по модулю) энергией связи:



Эту цепочку последовательных захватов α -частиц и электронов, которую принято называть "горением кремния можно условно записать в виде:



При расчете Q_n в этих реакция надо учитывать как Q_n^+ в прямых реакциях, так и Q_n^- в обратных. Это еще больше понижает эффективность энерговыделения при сгорании тяжелых ядер, а когда скорости прямых и обратных реакций становятся одинаковыми, суммарное энерговыделение становится равным нулю, а обилия ядер-реагентов и продуктов реакции оказываются связанным соотношением типа уравнения Саха.

Задачи

Задача VI.1. Сколько нейтрино пролетает через ваш глаз каждую секунду?

Задача VI.2. Оцените, сколько антивещества в данный момент содержится внутри Солнца, полагая, что аннигиляция электрона и позитрона описывается столкновением шариков с радиусом, равным классическому радиусу электрона r_e .

Задача VI.3. Из таблицы VI.1 следует, что в центре Солнца ($T_0 \approx 1.5 \cdot 10^7$ K) $\varepsilon_{CNO}/\varepsilon_{pp} \sim 0.1$. Вместе с тем, отношение $L_{\odot}^{CNO}/L_{\odot} \approx 1.3\%$, т.е. на порядок меньше. Почему?

Задача VI.4. Предположим, что в центральных областях химически однородной политропной звезды происходит горение водорода, причем скорость генерации ядерной энергии может быть аппроксимирована зависимостью (VI.4). Показать, что если уравнение состояние вещества звезды подчиняется закону Клайперона-Менделеева (III.22), то выражение для светимости, обусловленной ядерным энерговыделением, может быть записано в виде:

$$L_{nuc} \propto X_H X_2 \rho_0^{1/2} T_0^{s+3/2}, \quad (\text{VI.8})$$

где $X_2 = X_H$ в случае протон-протонных реакций и $X_2 = X_{CNO}$ в случае CNO-цикла.

Глава VII

Перенос энергии излучением внутри звезд

Элементарные процессы: b-b, b-f, f-f + рассеяние.

Если l_ν – средняя длина свободного пробега кванта частоты ν , то, согласно (V.11), соотношение

$$\sigma_\nu(\text{см}^2) = \frac{1}{nl_\nu}, \quad (\text{VII.1})$$

где n – концентрация частиц вещества, является определением эффективного сечения взаимодействия вещества с излучением частоты ν .

Когда имеем несколько сортов частиц и/или процессов, то $l_\nu = 1/\sum n_i \sigma_\nu^i$.

Назовем коэффициентом непрозрачности величину

$$\kappa_\nu \left(\frac{\text{см}^2}{\text{г}} \right) = \frac{\sum n_i \sigma_\nu^i}{\rho}. \quad \Rightarrow \quad l_\nu = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}. \quad (\text{VII.2})$$

Если $l \gg$ характерного размера системы L , то вещество с излучением практически не взаимодействует и потери носят объемный характер. **Пример:** начальные стадии сжатия протозвездного облака и нейтринное излучение.

Если $l \sim L$, то в системе значительный поток энергии $\Rightarrow t_r = E/\dot{E} \sim$ времени между столкновениями частиц t_c , т.е. времени установления локального термодинамического равновесия (ЛТР). Поэтому κ и I_γ взаимосвязаны. **Пример:** звездные атмосферы.

Если $l \ll L = T/T'$, то излучение диффундирует сквозь систему перенося энергию. При этом $t_r \gg t_c \Rightarrow$ ЛТР. **Пример:** звездные недра.

В частности, в центре Солнца средняя длина пробега квантов ~ 0.05 мм.

Диффузионное приближение

Пусть $F_{rad}^\nu d\nu$ (эрг/с/см²) – поток энергии, переносимый вдоль оси \mathbf{r} за 1 сек. через 1 см² квантами в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$. Тогда:

$$F_{rad}^\nu = c \cdot h\nu \cdot \frac{n_\nu^-}{6} - c \cdot h\nu \cdot \frac{n_\nu^+}{6} \simeq -\frac{c}{6} \cdot 2l_\nu \cdot \frac{d(h\nu \cdot n_\nu)}{dr}, \quad (\text{VII.3})$$

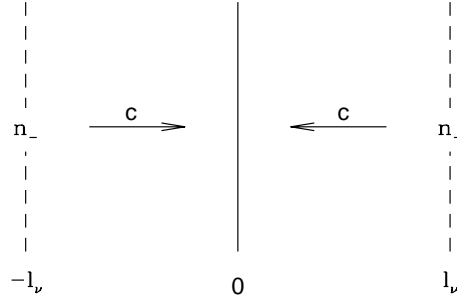


Рис. VII.1: К выводу соотношения (VII.3).

где n_ν – концентрация (см^{-3}) соответствующих фотонов.

Обозначив через $L^\nu(r)_{rad} d\nu$ – энергию, переносимую за 1 сек. фотонами в том же спектральном диапазоне через сферу с поверхностью $4\pi r^2$, имеем:

$$F_{rad}^\nu d\nu = \frac{L_{rad}^\nu d\nu}{4\pi r^2} = -\frac{l_\nu c}{3} \cdot \frac{d}{dr} (h\nu \cdot n_\nu d\nu). \quad (\text{VII.4})$$

При ЛТР концентрация фотонов n_ν с частотой от ν до $\nu + d\nu$ описывается соотношением (III.43), которое мы выразим через функцию Планка B_ν (III.44):

$$n_\nu = \frac{4\pi B_\nu}{c h\nu}, \quad B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Интегрируя по всем частотам получим для болометрического потока и светимости:

$$F_{rad} = \frac{L_{rad}}{4\pi r^2} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty l_\nu \frac{dB_\nu}{dr} d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dr} \int_0^\infty l_\nu \frac{dB_\nu}{dT} d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{dT}{dr} \bar{l} \frac{dB}{dT}, \quad (\text{VII.5})$$

где

$$B = \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad \sigma = \frac{ac}{4} \simeq 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг/с/см}^2/\text{K}^4. \quad \Rightarrow \quad (\text{VII.6})$$

$$\bar{l} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \cdot \int_0^\infty l_\nu \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \quad \Rightarrow \quad \bar{l} \rho = \frac{1}{\bar{\varkappa}} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\varkappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \quad (\text{VII.7})$$

Величины \bar{l} и $\bar{\varkappa}$ называются Росселандовым средним.

Пример 1. При рассеянии плоской электромагнитной волны на свободном электроде сечение взаимодействия определяется т.н. формулой Томсона – см., например, [5]: $\sigma_T = 8\pi r_e^2/3 \simeq 6.7 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$, где $r_e = e^2/m_e c^2$ – классический радиус электрона. Рассеяние на свободных электронах существенно, когда водород и гелий практически полностью ионизованы. Тогда из соотношений (VII.1), (VII.2) и (III.35) получаем выражение для т.н. томсоновской непрозрачности:

$$\varkappa_T = \frac{N_e \sigma_T}{\rho} = \frac{\sigma_T}{m_u \mu_e} \simeq 0.20 (1 + X). \quad (\text{VII.8})$$

Поскольку κ_T не зависит от частоты, при подстановке (VII.8) в (VII.7) получаем, что $\bar{\kappa}_T = \kappa_T$.

Пример 2. При f-f поглощении водородоподобным ионом с зарядом Z (с учетом вынужденного излучения и усредненное по Максвелловскому распределению скоростей электронов):

$$\frac{1}{l_\nu} = \rho \kappa_\nu^{f-f} \simeq 1.8 \cdot 10^8 \frac{Z^2 n_e n_Z}{T^{1/2} \nu^3} (1 - e^{-x}) \propto \frac{\rho^2}{T^{7/2}} \cdot \frac{1 - e^{-x}}{x^3},$$

где n_e, n_Z – концентрации электронов и ионов соответственно, а $x = h\nu/kT$. При обилии элементов близком к солнечному основной вклад в κ_{f-f} дает водород и гелий.

Тогда из (VII.7) получаем формулу Крамерса:

$$\bar{\kappa}_{f-f} \propto \rho T^{-7/2}.$$

Такая же зависимость от ρ и T получается и для связанно-свободных (f-b) переходов. При обилии тяжелых элементов близком к солнечному основной вклад в κ_{f-b} дают тяжелые элементы, причем $\kappa_{f-b} \propto Z$ – подробнее см. в [1].

Переходы f-f и f-b в значительной степени определяют непрозрачность во внутренних областях звезд, поэтому в дальнейшем мы неоднократно будем использовать следующее простое выражение для непрозрачности, называемое законом Крамерса:

$$\bar{\kappa}_K = \kappa_0 \rho T^{-7/2}. \quad (\text{VII.9})$$

Пример 3. Роль спектральных линий. Рассмотрим меандр с $\kappa = b$ в линиях и $\kappa = a$ в континууме, причем $a \ll b$ и ширина зубцов и впадин одинакова. Тогда $\bar{\kappa} = 2a$, т.е. вдвое больше, чем при отсутствии "спектральных линий".

С учетом (VII.7), соотношение (VII.5) запишется в виде:

$$4\pi r^2 F_{rad} = L_{rad} = - \frac{64\pi\sigma r^2}{3\bar{\kappa}\rho} T^3 \frac{dT}{dr},$$

или

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3\bar{\kappa}\rho L_{rad}}{64\pi\sigma r^2 T^3}. \quad (\text{VII.10})$$

Поскольку $dT/dr = (dT/dP) \cdot (dP/dr)$, в случае переноса энергии *только* излучением:

$$\frac{dT}{dr} = -\nabla_{rad} \frac{T}{P} \frac{\rho G m}{r^2}, \quad (\text{VII.11})$$

где

$$\nabla_{rad} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{rad} = \frac{3P\bar{\kappa}L_{rad}}{64\pi G m \sigma T^4}. \quad (\text{VII.12})$$

В дальнейшем Росселандово среднее будем обозначать через κ , опуская знак среднего.

При высоких плотностях тепло могут переносить вырожденные электроны. В общем виде уравнение теплопроводности имеет вид:

$$F_{cond} = -D_e \frac{dT}{dr}, \quad (\text{VII.13})$$

где D_e – коэффициент электронной теплопроводности. Если ввести

$$\kappa_{cond} \equiv \frac{16\sigma T^3}{3D_e \rho},$$

то (VII.13) запишется в виде, аналогичном (VII.10):

$$F_{cond} = \frac{16\sigma T^3}{3\kappa_{cond} \rho} \frac{dT}{dr}. \quad (\text{VII.14})$$

Полный поток тепла $F = F_{rad} + F_{cond}$, имеем:

$$F = \left(\frac{1}{\kappa_{cond}} + \frac{1}{\kappa_{rad}} \right) \frac{16\sigma T^3}{3\rho} \frac{dT}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{cond}} + \frac{1}{\kappa_{rad}}.$$

VII.0.1 Непрозрачность при низких температурах

Во внешних слоях звезд с $T_{ef} < 6000$ К основным источником непрозрачности становятся H^- , молекулы, а при $T < 1600$ К – пыль.

В случае отрицательных ионов водорода при $T < 6500$ К и $\lg \rho < -4$ с разумной степенью точности (см. Рис. VII.3) можно положить

$$\kappa \propto T_{ef}^4 \rho^{0.5}. \quad (\text{VII.15})$$

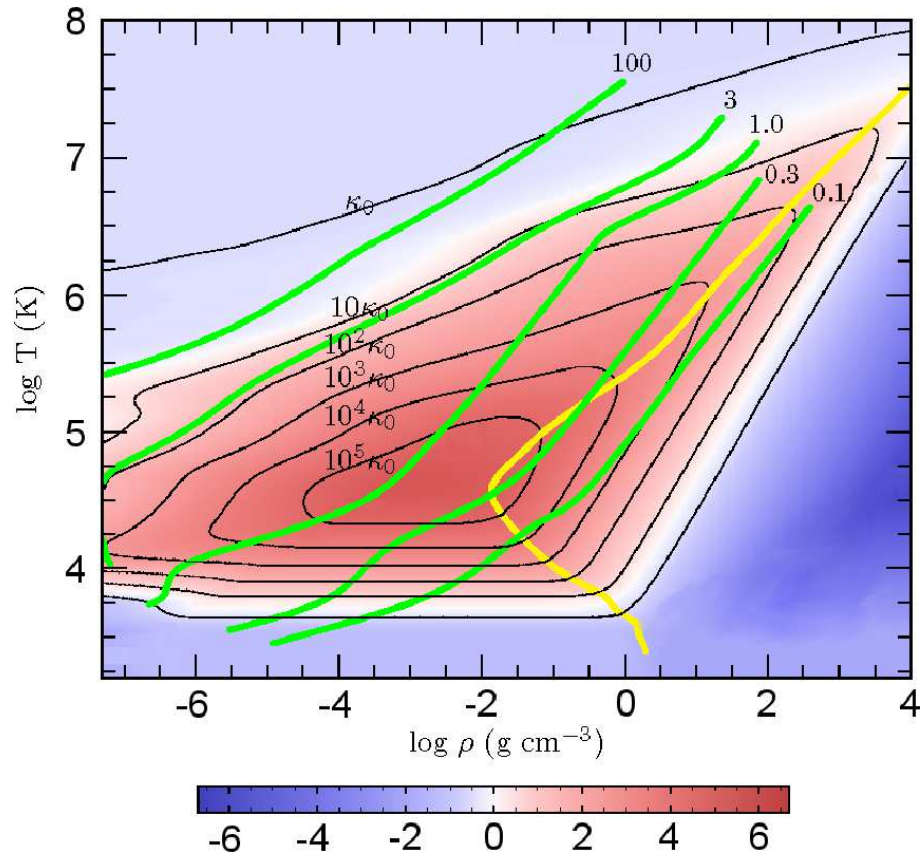


Рис. VII.2: Зависимость коэффициента непрозрачности от температуры и плотности для химсостава, близкого к солнечному: $X = 0.706$, $Y = 0.275$, $Z = 0.019$. Шкала под рисунком показывает соответствие цвета величине $\lg \kappa$. Тонкими черными линиями нанесены уровни $\kappa = \text{const}$ в единицах томсоновской непрозрачности $\kappa_0 = 0.2(1 + X)$ $\text{см}^2/\text{г}$. Слева от желтой линии непрозрачность определяется радиационными процессами, а справа – вырожденными электронами. Светло-зелеными линиями на рисунке изображена зависимость $T = T(\rho)$ внутри звезд начальной главной последовательности с массами 100, 3, 1, 0.3 и 0.1 M_\odot . Заимствовано из [28].

Задачи

Задача VII.1. Вывести соотношение (VII.1), рассмотрев, как поглощается свет в прозрачной среде, заполненной непрозрачными шариками с поперечным сечением σ .

Решение. Предположим, что свет распространяется параллельно оси цилиндрической трубки, заполненной непрозрачными шариками радиуса r . Если в единице объема находится n шариков, а площадь основания и длина цилиндра соответственно равны S и l , то всего в цилиндре имеется $N = Sln$ шариков.

Когда мы смотрим вдоль оси цилиндра, т.е. перпендикулярно его основаниям, то каждый шарик выглядит как экран площадью $\sigma = \pi r^2$, а суммарная площадь всех загораживающих свет экранов равна σN . Чем длиннее цилиндр, тем большая часть падающего на переднюю грань света будет загораживаться шариками-экранами. Свет

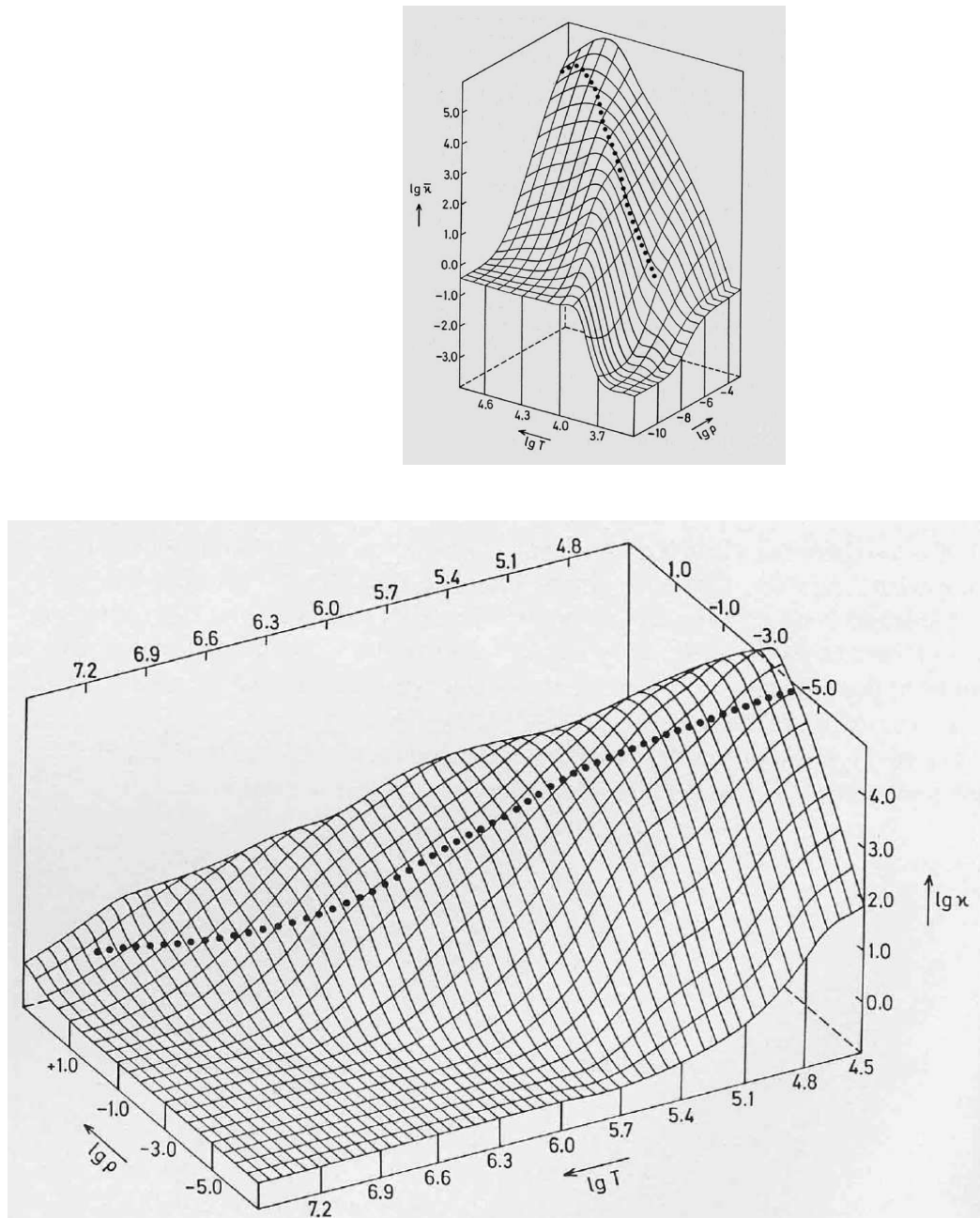


Рис. VII.3: Характер изменения непрозрачности внутри звезды с $M = 1M_{\odot}$ (пунктирная линия).

перестанет быть виден, когда длина цилиндра станет настолько большой, что суммарная площадь экранов сравняется с площадью основания, т.е. при условии

$$S = \sigma N = \sigma S \ln,$$

из которого и вытекает искомое соотношение.

Задача VII.2. При решении предыдущей задачи считалось, что мы перестаем видеть свет от источника, когда оптическая толщина среды, сквозь которую проходит

свет, $\tau = n\sigma l = 1$. Однако из закона Бугера

$$I(\tau) = I_0 \exp(-\tau)$$

следует, что при $\tau = 1$ интенсивность излучения источника I_0 ослабляется всего в e раз. Какое обстоятельство не было учтено в предыдущей задаче?

Решение. Мы не учли, что шарики могут частично загораживать друг друга. Из условия задачи вытекает, что этот эффект достаточно велик: при $\tau = 1$ суммарная площадь шариков уменьшается более чем на треть.

Задача VII.3. Предположим, что во внешней оболочке звезды выполняются следующие условия:

а) она состоит из идеального газа с $\mu = \text{const}$, причем давлением излучения можно пренебречь;

б) тепло переносится в этой области только излучением;

в) непрозрачность определяется томсоновским рассеянием;

г) масса внешней оболочки много меньше массы звезды M .

д) светимость L_r в оболочке не меняется.

Показать, что в такой оболочке давление и температура связаны соотношением:

$$P = P_{ph} + \frac{16\pi GM\sigma}{3\kappa_T L} \cdot (T^4 - T_{ef}^4), \quad (\text{VII.16})$$

где P_{ph} и T_{ef} – давление и температура на внешней границе звезды, под которой мы будем подразумевать фотосферу.

Решение. В рассматриваемом случае выражение (VII.12) можно переписать в виде:

$$\frac{dP}{dT^4} = \frac{16\pi GM\sigma}{3\kappa_T L}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение с начальным условием $P(T_{ef}) = P_{ph}$ получаем искомое соотношение (VII.16).

В глубинных слоях оболочки, т.е. при $T \gg T_{ef}$, давление будет $\gg P_{ph}$, поэтому соотношение (VII.16) можно записать в виде: $P \propto T^4$. С другой стороны, $P \propto \rho T$, поэтому $P \propto \rho^{1+1/3}$, т.е. оболочка рассматриваемого типа может быть описана политропной зависимостью (II.1) с $n = 3$.

Задача VII.4. Показать, что решением предыдущей задачи при тех же условиях, но для случая, когда непрозрачность определяется законом Крамерса (VII.9), является соотношение:

$$P^2 = P_{ph}^2 + \frac{256\pi GM\Re\sigma}{51\mu\kappa_0 L} \cdot (T^{17/2} - T_{ef}^{17/2}). \quad (\text{VII.17})$$

Решение. В этом случае равенство (VII.12) с учетом $\rho = P\mu/\Re T$ запишется в виде:

$$\frac{dP}{dT} = C \frac{T^{15/2}}{P}, \quad \text{где} \quad C = \frac{64\pi GM\Re\sigma}{3\mu\kappa_0 L}.$$

Отсюда следует, что

$$dP^2 = \frac{4C}{17} dT^{17/2}.$$

Интегрируя это равенство с начальным условием $P(T_{ef}) = P_{ph}$ получаем искомое соотношение (VII.17).

В глубинных слоях оболочки, т.е. при $T \gg T_{ef}$, давление будет $\gg P_{ph}$, поэтому соотношение (VII.17) можно записать в виде: $P \propto T^{17/4}$. С другой стороны, $P \propto \rho T$, поэтому $P \propto \rho^{1+4/13}$, т.е. оболочка рассматриваемого типа может быть описана политропной зависимостью (II.1) с $n = 13/4 = 3,25$.

Глава VIII

Конвекция в звездах

VIII.1 Условие возникновения конвекции

Пусть малый элемент объема газа слегка сместился на расстояние $\Delta r \ll r$ наружу ($\Delta r > 0$) от исходного положения. Если после этого элемент не стремится возвратиться к исходному положению, а продолжает удаляться от него, то возникает конвекция. При каком условии это произойдет?

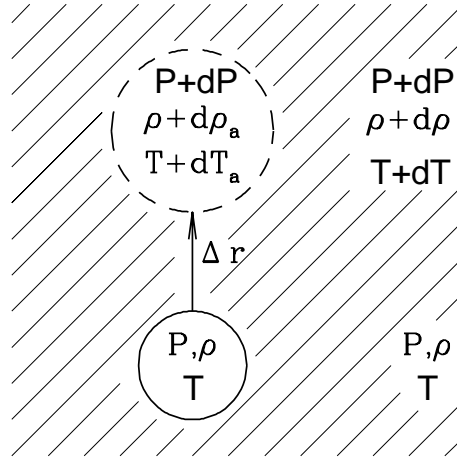


Рис. VIII.1: К выводу критерия Шварцшильда

Будем приписывать величинам, относящимся к элементу, индекс a , оставляя аналогичные параметры окружающей среды без индексов. Медленно всплывая, элемент расширяется, но $P_a(r) = P_c(r)$. Предположим, что теплообмен элемента с окружающей средой *почти* отсутствует, тогда $S_a(r) \simeq const$, т.е. ρ_a и T_a будут меняться внутри элемента (почти) по адиабатическому закону. Элемент будет всплывать, если в каждой точке $\rho_a < \rho$. Поскольку

$$\rho_a(r + \Delta r) = \rho(r) + \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_a \Delta r \quad \text{и} \quad \rho(r + \Delta r) = \rho(r) + \frac{d\rho}{dr} \Delta r,$$

где $\rho(r)$ – плотность на уровне, с которого элемент начинает всплывать, то конвекция возникнет, когда

$$\frac{d\rho}{dr} > \left(\frac{d\rho}{dr} \right)_a. \quad (\text{VIII.1})$$

Если химический состав вещества не меняется вдоль r , то из условия $P_a = P$ имеем:

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT_a + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho_a \implies \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \left[\frac{d\rho_a}{dr} - \frac{d\rho}{dr} \right] &= \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \left[\frac{dT}{dr} - \frac{dT_a}{dr} \right] = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \left[\frac{d \ln T}{d \ln P} - \frac{d \ln T_a}{d \ln P} \right] \frac{dP}{dr}. \end{aligned}$$

Поскольку $(\partial P / \partial \rho)_T > 0$, $(\partial P / \partial T)_\rho > 0$, а $dP/dr < 0$, условие возникновения конвекции (VIII.1) запишется в виде:

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} \equiv \nabla > \nabla_{ad} \equiv \frac{d \ln T_a}{d \ln P}. \quad (\text{VIII.2})$$

Но величина ∇ заранее не известна, более того, именно ее и надо найти.

При наличии конвекции излучение переносит лишь часть общего потока тепла L_r , т.е. $L_r = L_r^{rad} + L_r^{conv}$, причем согласно (VII.10) и (VII.12)

$$L_r^{rad} = \frac{64\pi\sigma GmT^4}{3\kappa P} \nabla.$$

Если бы все тепло переносилось только излучением, то для этого потребовался бы градиент ∇_{rad} , который определяется из соотношения:

$$L_r = \frac{64\pi\sigma GmT^4}{3\kappa P} \nabla_{rad}, \quad \text{т.е.} \quad \nabla_{rad} \equiv \frac{3}{64\pi\sigma G} \kappa \frac{P}{T^4} \frac{L_r}{m} = \nabla \frac{L_r}{L_r^{rad}}. \quad (\text{VIII.3})$$

Следовательно, $\nabla_{rad} \geq \nabla$, причем равенство имеет место лишь при отсутствии конвекции. Тогда из (VIII.2) следует, что конвекция возникнет, если выполняется условие (K.Schwarzschild, 1906):

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad}. \quad (\text{VIII.4})$$

В отличие от (VIII.2), в критерий Шварцшильда (VIII.4) входят лишь величины, которые известны в данной точке – см. (VIII.3).

Соотношение (VIII.4) получено выше для "всплывающего" ($\Delta r > 0$) элемента, однако тот же результат получится, если рассмотреть "тонущие" ($\Delta r < 0$) элементы.

Вообще говоря, (VIII.4) является лишь необходимым условием появления конвекции. Но для звезд критерий Шварцшильда можно использовать и в качестве достаточного условия – см., например, стр. 100 в [1].

Величина ∇_{ad} почти всегда $\simeq 2/5$, немного опускаясь ниже этого значения в областях неполной ионизации водорода и гелия, либо в областях, где излучение дает существенный вклад в давление, т.е. при $\beta \ll 1$. Поэтому критерий Шварцшильда

означает, что конвекция возникает там, где по какой-то причине заметно увеличивается ∇_{rad} . Чтобы выяснить, каковы эти причины, перепишем выражение (VIII.3) в виде:

$$\nabla_{rad} = \frac{1}{16\pi cG} \cdot \frac{\kappa}{(1-\beta)} \cdot \frac{L_r}{m}. \quad (\text{VIII.5})$$

Видно, что ∇_{rad} может быть большой либо за счет высокой непрозрачности κ , либо за счет большого отношения L_r/m , либо за счет малости множителя $1-\beta = P_r/P$. Роль первых двух факторов в возникновении конвекции достаточно очевидна: при высокой непрозрачности вещества или высоком темпе энерговыделения излучение не справляется с переносом тепла и включается дополнительный механизм теплопереноса – конвекция. По этим причинам конвекция возникает во внешних слоях звезд поздних спектральных классов, у которых в зонах неполной ионизации H и He велика непрозрачность, и в центральных областях звезд главной последовательности с массой свыше $\simeq 1 M_\odot$.

Что касается последнего фактора, то когда отношение $P_r/P \ll 1$, величина $1-\beta \simeq N_\gamma/N$, где N_γ – концентрация фотонов, а N – обычных частиц. Действительно, с учетом (III.45), в этом случае имеем:

$$1-\beta \simeq \frac{P_r}{P_g} = \frac{aT^4}{3NkT} \simeq 0.87 \frac{N_\gamma}{N}.$$

Следовательно, если ∇_{rad} превышает ∇_{ad} из-за малости величины $1-\beta$, то это значит, что фотонов становится слишком мало, чтобы перенести нужное количество тепла и возникает конвекция. Наряду с высокой непрозрачностью вещества этот механизм, по-видимому, объясняет наличие конвекции в центральных областях звезд нижней части главной последовательности.

Если в среде имеется градиент химсостава, т.е. $dX_i/dr \neq 0$, то вместо (VIII.4) условием начала конвекции следует считать критерий Леду (P.Ledoux, 1957):

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad} + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P,\rho} \cdot \frac{d \ln \mu}{d \ln P}, \quad (\text{VIII.6})$$

который получается, если учесть, что $P = P(\rho, T, \mu)$.

В результате ядерных превращений $d\mu/dr$ становится < 0 , так что $d\mu/dP > 0$. Поскольку для идеального газа $(\partial T/\partial \mu)_{P,\rho} > 0$, в зоне переменного химсостава может возникнуть ситуация, когда критерий (VIII.4) выполнен, а (VIII.6) – нет, т.е. градиент химсостава, обусловленный ядерной эволюцией, препятствует началу конвекции.

VIII.2 Перенос энергии конвекцией

Пусть условие (VIII.4) или (VIII.6) выполнено. Тогда, по аналогии с (VIII.3), напомним:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{dT}{dP} \cdot \frac{dP}{dr} = -\nabla \frac{T}{P} \frac{\rho G m}{r^2}.$$

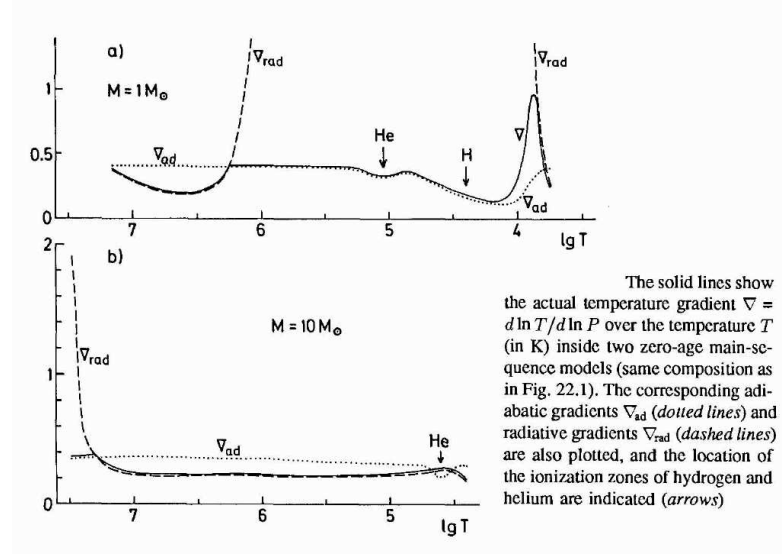


Рис. VIII.2:

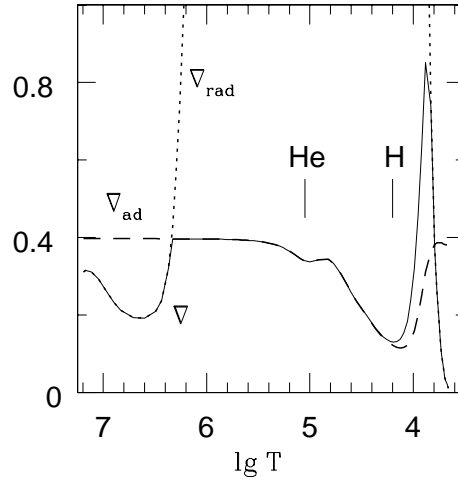


Рис. VIII.3: Изменение градиентов внутри Солнца по расчетам С.Аюкова

В Приложении показано, как в рамках т.н. локальной теории пути перемешивания найти величину ∇ . Эта феноменологическая теория предполагает, что возникнув, конвективные элементы проходят в среднем расстояние l_m , после чего растворяются в окружающей среде. Единственным параметром теории является величина $\alpha = l_m / H_p$, где $H_p = -P / (dP/dr) = P / \rho g$ – т.н. шкала высот по давлению. Величина α выбирается так, чтобы модель звезды наилучшим образом соответствовала наблюдениям. Как правило, $0.5 < \alpha < 2$.

Введем обозначения:

$$\delta \equiv \frac{(\partial P / \partial \rho)_T}{(\partial P / \partial T)_\rho}, \quad U_0 \equiv \frac{6acT^3 g}{\kappa_{CP} \alpha^2 P^2} \sqrt{\frac{2P\delta}{T}}.$$

При этом U_0 – безразмерная величина, а для идеального газа $\delta = T/\rho$, если $\mu = const.$

Тогда вводя вспомогательную величину ξ такую, что $\nabla = \xi^2 + \nabla_{ad} - U_0^2$, можно получить следующее уравнение для ξ :

$$(\xi - U_0)^3 + \frac{8U_0}{9} (\xi^2 - U_0^2 + \nabla_{ad} - \nabla_{rad}) = 0, \quad (\text{VIII.7})$$

которое имеет всего один вещественный корень, т.е. ∇ определяется однозначно.

Пусть конвекция происходит в центральных областях звезды. При $r \rightarrow 0$, \varkappa и все термодинамические величины стремятся к (конечным) центральным значениям, тогда как $g \rightarrow 0$. Поэтому вблизи центра $U_0 \rightarrow 0$. Тогда из (VIII.7) следует, что и $\xi \rightarrow 0$, а следовательно $\nabla \simeq \nabla_{ad}$. \Rightarrow Структура конвективного ядра звезды слабо зависит от неопределенности теории конвекции.

Конвекция в зоне ядерного горения перемешивает вещество и поскольку $t_{conv} \ll t_{nuc}$, то

$$\bar{X}_i = \frac{1}{M_{conv}} \int X_i dm.$$

У поверхности звезды g, \varkappa, T и c_P стремятся к конечным значениям, а $P \rightarrow 0$, поэтому во внешних конвективных зонах $U_0 \gg 1$. Можно показать (см. Приложение 1 ???), что с ростом U_0 $\nabla \rightarrow \nabla_{rad}$ – согласно (VIII.3) это значит, что $L_r^{rad} \rightarrow L_r$, т.е. конвекция становится малоэффективной.

При промежуточных значениях U_0 роль конвекции существенна, и для определения величины ∇ следует решать уравнение (VIII.7). Таким образом, недостатки локальной теории конвекции сильнее всего сказываются на структуре конвективных оболочек.

VIII.3 Критическая светимость

Поскольку $P = P_g + aT^4/3$,

$$-\frac{Gm}{r^2} \rho = \frac{dP}{dr} = \frac{dP_g}{dr} + \frac{4a}{3} T^3 \frac{dT}{dr}.$$

Согласно (VII.10), в зоне лучистого переноса

$$L_r = -\frac{16\pi a c r^2}{3\varkappa \rho} T^3 \frac{dT}{dr},$$

поэтому

$$\frac{dP_g}{dr} = -\frac{\rho Gm}{r^2} \left(1 - \frac{L_r}{L_r^{crit}} \right), \quad \text{где } L_r^{crit} = \frac{4\pi c Gm}{\varkappa}.$$

Если $\varepsilon_\nu = 0$ и $\partial/\partial t \simeq 0$, то $dT/dr < 0$. Поэтому при $L_r > L_r^{crit}$ из условия $dP_g/dr > 0$ следует, что $d\rho/dr > 0$, т.е. там, где $L_r > L_r^{crit}$ плотность газа возрастает наружу.

Когда такая ситуация возникает во внутренних областях звезды, то инверсия плотности порождает конвекцию, вследствие чего L_r^{rad} становится меньше L_r , и инверсия плотности исчезает. Но если L_r превысит величину L_r^{crit} вблизи поверхности

звезды, где из-за малой плотности конвекция малоэффективна, то начинается истечение вещества в окружающее пространство (звездный ветер) – таков механизм потери массы у горячих звезд.

В частном случае, когда непрозрачность определяется томсоновским рассеянием на свободных электронах, т.е. при $\kappa = \kappa_T$, критическую светимость называют Эддингтоновским пределом:

$$L_{Ed} \equiv \frac{4\pi cGM}{\kappa_T} \simeq 3 \cdot 10^4 L_{\odot} \cdot \frac{M}{M_{\odot}}. \quad (\text{VIII.8})$$

Дополнение. Описание конвекции в приближении пути перемешивания.

Вывод выражения для ∇_{conv}

Рассмотрим область, в которой происходит конвекция. Предположим, что в силу случайных причин плотность газа в некотором малом объеме dV , который будем называть конвективным элементом (КЭ), стала меньше чем в окружающей среде. Тогда этот КЭ начнет всплывать, причем можно считать, что в начальный момент его плотность ρ_0 и температура T_0 были такими же, как и в окружающей среде. Однако по мере подъема малые исходные различия в ρ и T между КЭ и окружающей средой будут сначала возрастать, а затем, достигнув максимальной величины, уменьшаться, так что пройдя некоторое расстояние l_m , называемое длиной пути перемешивания, КЭ растворится в окружающей среде и исчезнет. Скорость движения КЭ v_e также вначале нарастает, а затем уменьшается.

На расстоянии Δr от исходной точки разность температур КЭ (индекс *e*) и окружающей среды (индекс *c*) будет равна:

$$\Delta T \equiv T_e - T_c = \left(\frac{dT_e}{dr} - \frac{dT_c}{dr} \right) \Delta r. \quad (\text{D2.1})$$

Заменив в (D2.1) T на ρ получим аналогичное выражение для разности плотностей $\Delta \rho$.

Будем считать, что КЭ всплывает достаточно медленно, в том смысле, что время, за которое его размер меняется заметным образом, много меньше, чем время, за которое через КЭ проходит звуковая волна. В этом случае давление внутри КЭ будет таким же, как и в окружающей среде, т.е. $P_e(r) = P_c(r)$, или $dP_c = dP_e \equiv dP$.

Конвекция эффективно перемешивает вещество, т.е. градиент химсостава в рассматриваемой области отсутствует. Поэтому

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho} dT_{e,c} + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho_{e,c} \implies \Delta \rho = -\frac{\Delta T}{\delta}, \quad \text{где } \delta \equiv \frac{(\partial P / \partial \rho)_T}{(\partial P / \partial T)_{\rho}}. \quad (\text{D2.2})$$

В данный момент поверхность сферы с радиусом r пересекает множество КЭ, каждый из которых перед этим прошел различное расстояние Δr и имеет определенные значения величин v_e , ∇T и $\nabla \rho$. Следовательно, чтобы определить, какой тепловой поток переносит конвекция через данную поверхность, надо учесть вклад всех

КЭ внутри области с $r_0 - l_m^{max} < r < r_0 - l_m^{min}$. Иными словами, корректная теория конвекции должна быть *нелокальной*. Такой подход сталкивается с принципиальными трудностями, и лишь в последнее десятилетие, благодаря разработке новых методов описания турбулентности и появлению достаточно мощных компьютеров, стали появляться трехмерные расчеты конвективных зон звезд.

Чтобы упростить ситуацию, как правило, используют *локальную* теорию конвекции, в которой фигурируют тем или иным способом усредненные параметры КЭ. Обычно, в этих теориях предполагается, что отношение "средней" длины пути перемешивания l_m к шкале высот по давлению $H_P = -P/(dP/dr) = P/g\rho$ постоянно внутри конвективной зоны. Величина $\alpha \equiv l_m/H_P$ является параметром теории и выбирается из наилучшего согласия модели звезды с наблюдениями. Локальные теории конвекции отличаются друг от друга различным способом усреднения параметров КЭ. Приводимый ниже подход заимствован из книги Киппенхана и Вейгерта [?].

Будем предполагать, что перед тем как пересечь поверхность сферы с $r = r_0$ "средний" КЭ прошел расстояние $\Delta r = l_m/2$. Тогда согласно (D2.1) средний избыток температуры КЭ в рассматриваемой точке будет равен:

$$\Delta T = \left(\frac{dT_e}{dr} - \frac{dT_c}{dr} \right) \frac{l_m}{2} = \left(\frac{dT_e}{dP} - \frac{dT_c}{dP} \right) \frac{dP}{dr} \frac{l_m}{2} = (T_c \nabla_c - T_e \nabla_e) \frac{l_m}{2H_P}. \quad (D2.3)$$

Здесь мы обозначили через ∇_e и ∇_c производные $d \ln T / d \ln P$, которые описывают изменение параметров внутри КЭ по мере его подъема и в окружающей среде соответственно. Величины с индексом c – это должным образом усредненные по множеству КЭ параметры, и именно они являются аналогами одноименных физических величин (ρ, T и т.п.) в зонах лучистого равновесия. По этой причине мы будем опускать в дальнейшем индекс c у переменных, характеризующих окружающую КЭ среду. Наша цель – найти величину $\nabla_{conv} \equiv \nabla_c$, используя которую можно написать выражение для dT/dr в конвективной зоне:

$$\frac{dT}{dr} \equiv -\nabla_c \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} = \nabla_c \frac{T\rho}{P} \frac{Gm}{r^2}. \quad (D2.4)$$

Поскольку $\Delta T/T \ll 1$, заменим в последнем равенстве (D2.3) T_e на T . Тогда

$$\Delta T \simeq (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha T}{2}. \quad (D2.5)$$

Результирующая сила $f(r)$, действующая на единичный объем КЭ и заставляющая его всплывать (или тонуть), равна $\rho g - \rho_e g = -g\Delta\rho$. По мере подъема КЭ она вначале нарастает от 0 до f_{max} , а затем уменьшается, обращаясь в ноль при $\Delta r = l_m$. Примем, что на участке пути от 0 до $l_m/2$ среднее значение силы \bar{f} равно $0.5 * f(l_m/2)$. Тогда с учетом (D2.2) и (D2.5) имеем:

$$\bar{f} = -\frac{g}{2}\Delta\rho = \frac{g}{2\delta}\Delta T = (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha g T}{4\delta}$$

Предположим далее, что в среднем половина работы, совершаемой этой силой идет на преодоление сил вязкости, а половина – на прирост кинетической энергии КЭ, так что

$$\frac{\rho v_e^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{f} \frac{l_m}{2} = (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha g T l_m}{16\delta},$$

где v_e – скорость среднего КЭ при пересечении сферы с радиусом r_0 . Следовательно:

$$v_e^2 = (\nabla_c - \nabla_e) \frac{\alpha g T l_m}{8 \rho \delta}, \quad (D2.6)$$

Рассмотрим теперь изменение температуры по мере подъема (или опускания) среднего КЭ, считая, что его характерный размер – d_e , площадь поверхности – S_e , объем – V_e , а масса $M_e = V_e \rho_e$. Обозначим через S удельную энтропию КЭ, а через dQ – количества тепла, теряемое КЭ за время dt в результате излучения энергии в окружающее пространство. Тогда:

$$\frac{dQ}{M_e} = T_e dS = T_e \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT_e + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP \right] = c_P \left[dT_e - \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S dP \right].$$

Поскольку $dr = v_e dt$, и $\nabla_{ad} \equiv (\partial \ln T / \partial \ln P)_S$, это выражение можно переписать в виде:

$$\frac{dT_e}{dr} = \frac{1}{c_P M_e v_e} \frac{dQ}{dt} - \frac{T_e}{H_P} \nabla_{ad}. \quad (D2.7)$$

Аналогично (VII.12) можно написать для "светимости" КЭ:

$$L_e = \frac{4acT_e^3}{3\kappa\rho} \left| \frac{dT}{dn} \right| S_e,$$

подразумевая, что производная $T' \equiv dT/dn$ вычисляется вдоль нормали к поверхности КЭ. Если положить $T' \simeq \Delta T / (d_e/2)$, учесть, что $dQ/dt = -L_e$, то с помощью (D2.5) получим из (D2.7):

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{ad}}{\nabla_c - \nabla_e} = \frac{4acT_e^3}{3\alpha H_P c_P \kappa \rho_e^2 v_e} A.$$

Здесь через A обозначено безразмерное отношение $l_m^2 S_e / d_e V_e$, которое зависит от формы и размера "среднего" КЭ. Принято считать, что $A = 9/2$, и тогда, полагая $T_e \simeq T$, $\rho_e \simeq \rho$, находим:

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{ad}}{\nabla_c - \nabla_e} = \frac{6acT^3}{\alpha H_P c_P \kappa \rho^2 v_e} \quad (D2.8)$$

При наличии конвекции $L_r = L_r^{rad} + L_r^{conv}$, поэтому согласно (8.3) и (8.4):

$$\frac{16\pi acGmT^4}{3\kappa P} \nabla_{rad} = \frac{16\pi acGmT^4}{3\kappa P} \nabla_c + L_r^{conv}. \quad (D2.9)$$

Т.к. $\Delta P = 0$, то в расчете на единицу массы вещество КЭ обладает избыточным теплом $c_P \Delta T$ по сравнению с окружающей средой. Поток вещества, связанный с движением КЭ равен $4\pi r^2 \rho v_e$, поэтому переносимый конвекцией тепловой поток $L_r^{conv} = 4\pi r^2 \rho v_e c_P \Delta T$. Тогда из (D2.5) и (D2.9) получим, учитывая, что $H_P = P/g\rho$ и $g = Gm/r^2$:

$$\frac{\nabla_{rad} - \nabla_c}{\nabla_c - \nabla_e} = \frac{3\kappa \rho^2 c_P \alpha H_P}{8acT^3} v_e \quad (D2.10)$$

Соотношения (D2.6), (D2.8) и (D2.10) дают три уравнения для трех неизвестных величин: ∇ , ∇_e и v_e . Перемножив почленно (D2.8) и (D2.10) получим:

$$\frac{(\nabla_e - \nabla_{ad})(\nabla_{rad} - \nabla_c)}{(\nabla_c - \nabla_e)^2} = \frac{9}{4}. \quad (D2.11)$$

Выразим теперь v_e из (D2.6) и подставим в (D2.8). Вводя безразмерную переменную

$$U_0 \equiv \frac{6acT^3g}{\kappa_{CP}\alpha^2P^2} \sqrt{\frac{2P\delta}{T}}, \quad \text{получим:} \quad \nabla_e - \nabla_{ad} = 2U_0 \sqrt{\nabla_c - \nabla_e}. \quad (D2.12)$$

Перепишав левую часть (D2.12) в виде $(\nabla_c - \nabla_{ad}) - (\nabla_c - \nabla_e)$ получим квадратное уравнение относительно $\sqrt{\nabla_c - \nabla_e}$, решив которое найдем, что

$$\sqrt{\nabla_c - \nabla_e} = -U_0 + \xi, \quad \text{где} \quad \xi = \sqrt{\nabla_c - \nabla_{ad} + U_0^2}. \quad (D2.13)$$

Подставляя это выражение в (D2.11) получим кубическое уравнение относительно ξ :

$$(\xi - U_0)^3 + \frac{8U_0}{9} (\xi^2 - U_0^2 + \nabla_{ad} - \nabla_{rad}) = 0. \quad (D2.14)$$

Можно показать, что оно имеет всего один вещественный корень, что дает возможность однозначно найти величину ∇_c .

Замечание 1. Характерное время для процесса конвекции $t_{conv} \sim H_P/v_e$, причем, как правило, $t_{hyd} \ll t_{conv} \ll t_{nuc}$. Это значит, что в конвективных зонах сохраняется гидростатическое равновесие, а химсостав остается одинаковым внутри всей зоны, даже если ядерные реакции происходят лишь внутри ее части. При т.н. тепловых вспышках в слоевых источниках или в вырожденном ядре гидростатическое равновесие кратковременно нарушается, и для описания конвективного переноса энергии и перемешивания вещества применяются более сложные модели конвекции.

Замечание 2. Из (D2.12) следует, что при $U_0 \rightarrow 0$, $\nabla_e \rightarrow \nabla_{ad}$. При этом, согласно (D2.13), и $\nabla_c \rightarrow \nabla_{ad}$.

Конвективный пережест и полуконвекция

При описании конвекции в рамках локальных теорий возможно явление, называемое конвективным пережестом (convective overshooting): разогнавшись, КЭ по инерции может вылететь за внешнюю или внутреннюю границу конвективной зоны $r = R_c$. Оценки показывают, что КЭ может проникать в область лучистого переноса на расстояние $\Delta r \sim$ нескольких % от H_P . Рассмотрим случай, когда R_c – верхняя граница конвективной зоны. При $r > R_c$ КЭ имеет температуру меньше, чем окружающая среда, которая вынуждена будет терять тепло на нагрев КЭ. В результате непосредственно за границей конвективной зоны температура будет убывать наружу быстрее, чем раньше, т.е. величина ∇_{rad} возрастет. Из-за этого условие начала конвекции $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$ будет выполняться уже вплоть до $R_c^1 > R_c$. Это приведет к смещению верхней границы области пережеста, и, тем самым, еще увеличит протяженность

конвективной зоны и т.д. В конечном итоге протяженность конвективной зоны может возрасти на величину $\sim H_P$. Рассуждения в случае, когда R_0 – нижняя граница конвективной зоны, совершенно аналогичны. При *нелокальном* описании конвекции проблема перехлеста решается автоматически.

Корректный учет конвективного перехлеста особенно важен на поздних стадиях эволюции, когда в звезде имеется несколько конвективных областей, разделенных тонкой зоной лучистого переноса. Например, когда звезда находится на асимптотической ветви гигантов, тонкая "лучистая прослойка" имеется между внешней конвективной зоной и слоевым источником, в котором ${}^4\text{He}$ превращается в ${}^{12}\text{C}$. Если конвективный перехлест достаточно велик, то углерод попадет в поверхностные слои звезды, и у нее будет наблюдаться повышенное содержание ${}^{12}\text{C}$. С другой стороны, проникающие в слоевой источник КЭ приносят в зону горения дополнительные порции гелия, увеличивая тем самым время жизни звезды на этой стадии эволюции.

В рамках локальных теорий конвекции серьезной проблемой является вопрос о том, насколько эффективно градиент химсостава подавляет конвекцию. Иными словами, будет ли происходить конвекция в области, где она должна быть согласно критерию Шварцшильда, но не должна быть по критерию Леду, т.е. при выполнении условий:

$$\nabla_{ad} < \nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \nabla_{\mu}, \quad \text{где } \nabla_{\mu} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \mu} \right)_{P,\rho} \frac{d \ln \mu}{d \ln P} > 0. \quad (D2.15)$$

Наиболее серьезно эта проблема возникает при изучении эволюции массивных звезд на главной последовательности (ГП) и на стадии горения гелия в ядре. В частности, вблизи начальной ГП у этих звезд конвекция происходит в области $r < R_c$, намного более протяженной, чем зона, в которой происходит ядерное горение ($R_{nuc} < R_c$). Внутри области с $r < R_c$ конвекция поддерживает химсостав одинаковым, но с течением времени размер конвективной зоны убывает, поэтому вне ядра формируется область, внутри которой обилие водорода растет наружу ($dX/dr > 0$).

Поскольку $\mu = (2X + 0.75Y + 0.5Z)^{-1} = (1 + 1.25X - 0.25Z)^{-1}$, получаем, что в этой зоне

$$\frac{d\mu}{dr} = -\frac{1.25}{\mu^2} \cdot \frac{dX}{dr} < 0, \implies \frac{d \ln \mu}{d \ln P} > 0.$$

Для смеси излучения и невырожденного, полностью ионизованного газа $(\partial T / \partial \mu)_{P,\rho} > 0$, (убедитесь в этом самостоятельно!). Поэтому в интересующей нас области $\nabla_{\mu} > 0$, причем оказывается, что в некоторой ее части, называемой зоной полуконвекции (semiconvection), выполняется неравенство (D2.15).

Вначале считалось, что подобного рода области конвективно устойчивы, поскольку при смещении КЭ от исходного положения на него начинает действовать сила, направленная в противоположную сторону. Но Като (S.Kato, 1966) указал на принципиальную возможность ситуации, когда за счет теплообмена с окружающей средой, при возвращении в исходное положение КЭ приобретет кинетическую энергию, и, следовательно, будет колебаться вокруг исходного положения с постепенно нарастающей амплитудой. При этом будет происходить постепенное перемешивание вещества, за что этот процесс и называют полуконвекцией или колебательной конвекцией. При наличии достаточного времени вещество полуконвективной зоны достаточно

хорошо перемешается, величина ∇_μ уменьшится, и конвекция перейдет в "нормальный" режим, поскольку тогда будет выполнен как критерий Шварцшильда (S), так и критерий Леду (L) – см. (D2.15).

До сих пор нет единого мнения о том, как корректно описать процесс теплообмена конвективных элементов разного размера с окружающей средой, и как следует усреднять параметры множества КЭ. Поэтому оценка эффективности полуконвекции колеблется в работах разных авторов от весьма высокой до пренебрежимо малой. Если полуконвекция достаточно быстро перемешивает вещество, то вскоре неоднородность химсостава исчезает, и наличие или отсутствие конвекции определяется по S-критерию. Если же перемешивание в полуконвективной зоне происходит слишком медленно по сравнению с характерным временем изменения структуры звезды, то можно считать, что конвекции нет вообще, что и предсказывает L-критерий. Из-за отсутствия надежной теории большинство исследователей вообще не рассматривает структуру зон полуконвекции, а рассчитывают два эволюционных трека: один с использованием S-критерия, а другой – критерия Леду, и затем пытаются сделать вывод об эффективности полуконвекции из сравнения полученных результатов с наблюдениями.

У звезд с массами от 10 до 40 M_\odot дополнительное перемешивание (S-модели) не только увеличивает время жизни на ГП, но и в несколько раз повышает светимость. В результате верхняя часть полосы ГП на диаграмме Г-Р расширяется настолько, что практически полностью смыкается с областью голубых сверхгигантов, т.е. звезд находящихся на более поздних стадиях эволюции. Однако к тому же результату приводит эволюция L-моделей, рассчитанная с учетом потери массы за счет сильного звездного ветра. Модели, рассчитанные с критерием Леду, превращаются в красные сверхгиганты еще до того, как в центре звезды загорится гелий, но вскоре после начала 3α -реакций L-модели уходят в область голубых сверхгигантов. С другой стороны, гелий в ядрах S-моделей загорается, когда звезда ненамного отошла от главной последовательности, т.е. также в области голубых сверхгигантов. Таким образом оказывается, что решить вопрос об эффективности полуконвекции из сравнения расчетов с наблюдениями – задача нетривиальная.

Задачи

Задача VIII.1. Показать, что в политропных звездах, у которых уравнение состояния описывается законом Клайперона-Менделеева (III.22) с $\mu = \text{const}$,

$$\nabla = \frac{1}{1+n}. \quad (\text{VIII.9})$$

Решение Искомое соотношение получается, если подставить (III.22) в (II.1) и использовать определение ∇ .

Задача VIII.2. Рассмотрим политропные звезды, у которых уравнение состояния описывается законом Клайперона-Менделеева (III.22) с $\mu = \text{const}$. Показать, что при $n > 1.5$ тепло в таких звездах переносит излучение, а при $n \leq 1.5$ – конвекция.

Решение Подставляя в условие (VIII.2) выражение (VIII.9) с учетом (III.53) получаем, что конвективный перенос тепла будет происходить, если

$$\nabla = \frac{1}{n+1} \geq \nabla_{ad} = \frac{2}{5},$$

т.е. при $n \leq 1.5$, что и требовалось доказать. В частности, случай адиабатической конвекции ($\nabla = \nabla_{ad}$) соответствует политропе $n = 1.5$.

Задача VIII.3. Какой из критериев – (VIII.4) или (VIII.6) – надо применять в зонах неполной ионизации с однородным химсоставом $X_i(r) = \text{const}$?

Задача VIII.4. Покажите, что в конвективной зоне удельная энтропия газа убывает наружу, а в области лучистого переноса, наоборот, возрастает.

Решение. Будем рассматривать энтропию, как функцию величин P и T . Тогда имеем:

$$\frac{dS}{dr} = \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dr} + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dr}.$$

Но $(\partial S / \partial T)_P = c_P / T$, а

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S = - \frac{c_P}{P} \nabla_{ad},$$

поэтому

$$\frac{dS}{dr} = \frac{c_P}{P} (\nabla - \nabla_{ad}) \frac{dP}{dr} = - \frac{\rho G m c_P}{P r^2} (\nabla - \nabla_{ad}).$$

Отсюда и вытекает, что когда $\nabla \geq \nabla_{ad}$, т.е. в конвективной зоне, $dS/dr \leq 0$, а в зоне лучистого переноса $dS/dr > 0$.

Задача VIII.5. Показать, что в тонкой изотермической атмосфере, т.е. при $T(r)$, $g(r) = \text{const}$, состоящей из идеального газа

$$\rho = \rho_0 \exp \left(- \frac{h}{H_p} \right), \quad \text{где} \quad H_p = \frac{\Re T}{\mu g}. \quad (\text{VIII.10})$$

Найти H_p для атмосфер Земли, Солнца и нейтронной звезды с $M = M_\odot$, $R = 10$ км и $T_{ef} = 10^6$ К.

Глава IX

Полная система уравнений для расчета строения и эволюции звезды

IX.1 Закон сохранения энергии

Пусть ε_{nuc} (эрг/г/с) – скорость выделения энергии в ядерных реакциях без учета энергии, уносимой нейтрино, а ε_ν (эрг/г/с) – удельная мощность нейтринного излучения, не связанного с ядерными реакциями. Тогда изменение количества тепла δq за время dt в тонком сферическом слое с массой dm можно записать в виде:

$$\delta q = \varepsilon_{nuc} dm dt - \frac{dL_m}{dm} dm dt - \varepsilon_\nu dm dt. \quad (\text{IX.1})$$

С другой стороны, согласно первому закону термодинамики:

$$\delta q = \left[dE + P d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] dm \quad (\text{IX.2})$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial L_m}{\partial m}\right)_t = \varepsilon_{nuc} - \varepsilon_\nu - \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_m + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_m. \quad (\text{IX.3})$$

Каков физический смысл слагаемых с производными по времени? Для ответа на этот вопрос проинтегрируем уравнение (9.1) от 0 до M , учитывая, что t и m – независимые переменные.

Имеем:

$$\int_0^M \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_m dm = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^M E dm \right) = \frac{\partial E_*}{\partial t},$$

где E_* – полная тепловая энергия звезды.

Вычислим теперь интеграл

$$I = \int P \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial t} dm$$

по частям, полагая

$$u = P, \quad dv = \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial t} dm.$$

Тогда

$$du = \frac{dP}{dm} dm = -\frac{Gm}{4\pi r^4} dm,$$

а

$$v = \int \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial t} dm = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dm}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t} \int 4\pi r^2 dr = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t}.$$

Соответственно имеем:

$$I = 4\pi r^2 P \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_0^M + \int_0^M 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{Gm}{4\pi r^4} dm = 0 + \int_0^M \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{Gm}{r^2} dm = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = \frac{\partial U}{\partial t},$$

где U – гравитационная энергия звезды.

Введем следующие обозначения: L_γ – полная фотонная светимость звезды, а величины

$$L_{nuc} = \int_0^M \varepsilon_{nuc} dm, \quad L_\nu = \int_0^M \varepsilon_\nu dm$$

назовем ядерной и нейтринной светимостью звезды соответственно.

Тогда окончательный результат интегрирования уравнения (IX.3) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial(U + E_*)}{\partial t} = L_{nuc} - L_\nu - L_\gamma. \quad (\text{IX.4})$$

Если $L_{nuc} = L_\nu = 0$, то для звезды, состоящей из идеального газа с $\gamma = 5/3$ (для которой $E_* = -U/2$), получим:

$$L_\gamma = -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (\text{IX.5})$$

Следовательно, слагаемое с временными производными в (9.1) описывает выделение энергии за счет работы сил тяготения. В данном случае ($\gamma = 5/3$) ровно половина совершаемой работы идет на нагрев звезды, а половина – уносится излучением в окружающее пространство.

IX.2 Математическая формулировка задачи

$$\left(\frac{\partial r}{\partial m} \right)_t = \frac{1}{4\pi \rho r^2} \quad (\text{IX.6})$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial m} \right)_t = -\frac{Gm}{4\pi r^4}, \quad (\text{IX.7})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial m} \right)_t = -\nabla \frac{T}{P} \frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (\text{IX.8})$$

$$\left(\frac{\partial L_r}{\partial m} \right)_t = \varepsilon_{nuc} - \varepsilon_\nu - \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_m + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_m. \quad (\text{IX.9})$$

Причем:

$$\text{при } \nabla_{rad} < \nabla_{ad} \text{ (зона лучистого переноса):} \quad \nabla = \nabla_{rad}, \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_m = \frac{\varepsilon_n}{Q_n^*}.$$

$$\text{при } \nabla_{rad} \geq \nabla_{ad} \text{ (конвективная зона):} \quad \nabla = \nabla_{conv}, \quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_m = \frac{L}{m_{conv} Q_n^*}.$$

$$\text{Здесь} \quad \nabla_{rad} = \frac{3\kappa L_r P}{16\pi ac G m T^4}, \quad \nabla_{ad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_s, \quad P, E, \kappa, \varepsilon_{nuc}, \varepsilon_\nu = f(\rho, T, X_i).$$

IX.3 Граничные условия

Структура звезды описывается четырьмя дифференциальными уравнениями, поэтому требуется задать четыре граничных условия.

Внешняя граница (поверхность) звезды

Внешней границей (поверхностью) звезды считается ее фотосфера. Вышележащие слои, называемые звездной атмосферой, имеют оптическую толщину $\tau \simeq 1$. Радиус R и эффективная температура T_{ef} относятся к уровню фотосферы. У большинства звезд, кроме красных гигантов и сверхгигантов протяженность атмосферы звезды, характеризуемая шкалой высот H_p , много меньше R .

Первым граничным условием на поверхности является соотношение:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 \quad \text{при} \quad m = M. \quad (\text{IX.10})$$

Второе граничное условие – выражение для давления на уровне фотосферы P_{ph} , которое можно получить, решив задачу о структуре звездной атмосферы. Как известно, для расчета модели атмосферы необходимо кроме ее химического состава X_i задать величины L , T_{ef} и $g = GM/R^2$ – см., например, [11] или [10]. Поскольку заранее эти величины не известны, приходится, заранее выбрав химический состав, строить набор моделей атмосфер для различных комбинаций параметров L , T_{ef} и g , что неявным образом задает связь $P_{ph} = P_{ph}(L, T_{ef}, g)$.

Чем точнее нужно рассчитать модель звезды, тем более рафинированными должны быть модели атмосфер для получения второго граничного условия. Например, обычно предполагается, что звездная атмосфера находится в состоянии гидростатического равновесия, однако для звезд, у которых происходит мощное истечение вещества, приходится отказываться от этой гипотезы. В этом случае для построения модели атмосферы требуется иметь теорию, описывающую ускорение истекающего газа, в которую в качестве свободного параметра входит темп потери массы.

Для наших целей достаточно написать второе граничное условие в достаточно приближенном виде, ограничившись рассмотрением тонкой гидростатически равновесной атмосферы, состоящей из идеального газа. В этом случае температура газа

T при $\tau < 1$ меняется слабо, и в первом приближении атмосферу можно считать изотермической.¹ Тогда, из соотношения $\tau \simeq \rho_{ph} \kappa H_p \simeq 1$, где, согласно (VIII.10), $H_p = \Re T / \mu g$, получаем второе граничное условие в виде:

$$P_{ph} = \frac{\Re T_{ef} \rho_{ph}}{\mu_{ph}} \simeq \frac{GM}{\kappa_{ph} R^2} \quad \text{при} \quad m = M. \quad (\text{IX.11})$$

При известной зависимости $\kappa = \kappa(\rho, T)$ полученное соотношение в неявной форме связывает величины R , T_{ef} и ρ_{ph} .

Химический состав и масса звезды – параметры задачи.

Центр звезды.

В центре звезды имеем естественные граничные условия:

$$r = 0, \quad L_r = 0 \quad \text{при} \quad m = 0. \quad (\text{IX.12})$$

С формальной точки зрения, в правых частях уравнений (IX.6) и (IX.7) при $r = 0$ имеется сингулярность типа $0/0$, поэтому численное решение основной системы следует начинать не из центра, а из некоторой малой его окрестности. Легко показать, что на малом расстоянии r от центра:

$$\rho = \rho_0, \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0, \quad P = P_0 - \frac{2}{3} \pi G r^2 \rho_0^2, \quad (\text{IX.13})$$

$$L_r = m \xi_0, \quad \xi_0 \equiv \varepsilon_{nuc}^0 - \varepsilon_\nu^0 - \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_0 + \frac{P_0}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_0, \quad (\text{IX.14})$$

$$T = T_0 - \frac{2}{3} \pi G r^2 \rho_0^2 \frac{\gamma_0 T_0}{P_0} \quad - \text{адиабатическая конвекция,}$$

$$T = T_0 - \xi_0 \frac{\kappa_0 \rho_0^2}{8acT_0^3} r^2 \quad - \text{лучистый перенос.}$$

IX.4 Методы решения

1) Метод Шварцшильда

2) Метод Хеньи

3) Комбинированный метод

Некоторые из последних (на момент написания данного текста) вариантов программ для расчета эволюции сферически симметричных звезд описан в работах [25], [28].

+ Bressan A. et al. MNRAS 427, 127 (2012) <— Изохроны для os and gc!

¹Например, в рамках т.н. эддингтоновского приближения [11], $T = T_{ef} (0.5 + 0.75\tau)^{1/4}$, так что $T = T_{ef}$ при $\tau = 2/3$, а $T(\tau = 0)$ отличается от T_{ef} всего на 16 %.

Глава X

Эволюция звезд до главной последовательности

X.1 Коллапс протозвездного сферически симметричного облака

Предположим, что мы имеем однородное изотермическое облако газа с молекулярным весом μ . Пусть масса облака равна M , а характерный размер R . Тогда из условия $GM^2/R > 1.5kT \cdot (M/\mu m_u)$ с учетом $\rho \simeq M/4R^3$ получаем, что облако начнет сжиматься под действием самогравитации, если его плотность

$$n = \frac{\rho}{\mu m_u} > \frac{27}{32} \frac{\Re^3 T^3}{m_u \mu^4 G^3 M^2} \simeq 4 \cdot 10^5 \left(\frac{T}{30} \right)^3 \left(\frac{2}{\mu} \right)^5 \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \text{ см}^{-3}. \quad (\text{X.1})$$

(критерий Джинса). Значения $n \geq 10^5 \text{ см}^{-3}$, $T \sim 30 \text{ К}$ и $\mu \simeq 2$ характерны для внутренних областей глобул и молекулярных облаков.

Но в однородном изотермическом облаке отсутствует градиент давления, который бы уравнивал силу гравитации, поэтому, на самом деле, любое такое облако должно сжиматься! Таким образом, следует рассмотреть более реалистичную ситуацию: окруженный внешней средой изотермический газовый шар, плотность и давление в котором возрастают от края к центру. Ранее было показано (см. стр. 35), что такой шар может существовать, если внешнее давление и плотность не превышают значений

$$P_{out}^{max} \simeq 1.40 \frac{\Re^4 T^4}{\mu^4 G^3 M^2}, \quad \rho_{out}^{max} \simeq 1.40 \frac{\Re^3 T^3}{\mu^3 G^3 M^2}.$$

Следовательно, изотермический шар начнет сжиматься, если плотность окружающей среды

$$n > 1.40 \frac{\Re^3 T^3}{m_u \mu^4 G^3 M^2}, \quad (\text{X.2})$$

что практически совпадает с соотношением (X.1).

Если переписать неравенство (X.2) в виде:

$$M > 1.2 \frac{\mathfrak{R}^{3/2} T^{3/2}}{m_u^{1/2} \mu^{4/3} G^{3/2} n^{1/2}},$$

то видно, что чем выше температура межзвездного газа, тем более массивные звезды могут из него формироваться (при фиксированной величине n). В газе, из которого (примерно 14 млрд. лет назад) рождались звезды первого поколения, практически не было элементов тяжелее гелия. Но именно тяжелые элементы эффективно охлаждают межзвездную среду, поскольку в отличие от гелия и водорода, у них имеются низколежащие энергетические уровни. Весьма эффективно охлаждают газ также молекулы H_2 , но их в эпоху первичного звездообразования было также меньше, чем сейчас, поскольку эти молекулы образуются, главным образом, на поверхности пылинок, состоящих из тяжелых элементов, которых тогда не было. Это значит, что температура газа, из которого формировались звезды первого поколения была намного выше, чем в современную эпоху, поэтому первые звезды Вселенной были очень массивными.

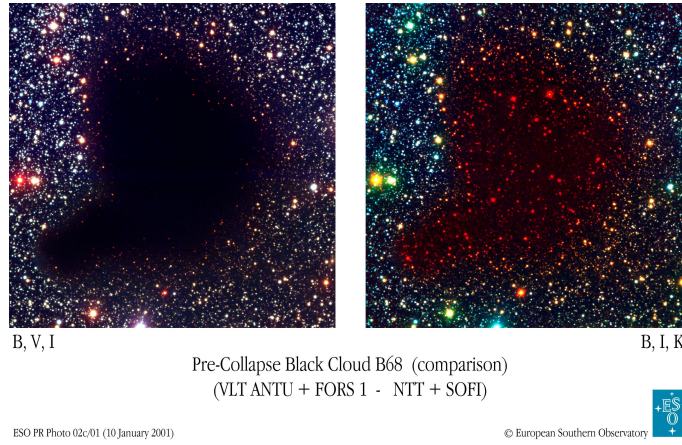


Рис. X.1: Изображения глобулы B68 в различных спектральных диапазонах: в полосах пропускания фильтров B,V,I (слева) и в фильтрах B,I,K (справа).

Поскольку

$$F_{gas} = \rho^{-1} \frac{dP}{dr} \propto \frac{T_o}{R},$$

а

$$F_{grav} = \frac{GM}{r^2} \propto R^{-2},$$

получаем, что при изотермическом (!) сжатии облака F_{gas} растет медленней, чем F_{grav} . По этой причине вскоре после начала сжатия F_{gas} становится $\ll F_{grav}$ и сжатие переходит в режим свободного падения (коллапс).

Х.2 Протозвезды

Коллапс происходит за время:

$$t_{ff} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \approx 5 \cdot 10^4 \frac{M/M_\odot}{(T_0, \text{K}/30)^{1.5}} \text{ лет.} \quad (\text{X.3})$$

В протозвездном облаке давление и плотность нарастают к центру. Поэтому, согласно (X.3), коллапс протекает неоднородно: центральные области сжимаются быстрее периферических.

Поскольку оптическая толща пропорциональна числу поглощающих частиц на луче зрения, т.е. $\tau \propto \rho R \propto 1/R^2$, то облако по мере сжатия (уменьшения R) становится все более непрозрачным. "Застревающее" в облаке излучение нагревает газ. Рост температура газа приводит к более быстрому нарастанию давления, по сравнению с режимом изотермического коллапса. Сильней всего это проявляется в центральных областях, где плотность растет наиболее быстро. В конечном итоге градиент давления становится сравнимым с F_{grav} , и в центре облака возникает гидростатически равновесное ядро – зародыш звезды, которое имеет массу $\sim 1\%$ массы облака. Ядро протозвезды не видно в оптике из-за большой оптической толщи оболочки. Дальнейшая эволюция протозвезды – это аккреция вещества оболочки на центральное ядро. Торможение падающего газа происходит в ударной волне на внешней границе ядра. С течением времени масса ядра растет, а оболочки уменьшаются. В конечном итоге оболочка становится прозрачной для оптического излучения, и на этом фаза протозвезды завершается. Наблюдаемое в видимой области спектра гидростатически равновесное ядро принято называть молодой звездой.

Х.3 Молодые звезды малой массы ($M < 2-3M_\odot$)

Линия на диаграмме $\lg L - \lg T_{ef}$, соответствующая положению молодых звезд разной массы в момент, когда оболочка становится прозрачной, называется *линией рождения звезд*. В этот момент молодые звезды с массой $M < 2 - 3 M_\odot$ полностью конвективны. Определим форму их трека на Г-Р диаграмме.

Структура полностью конвективной звезды может быть описана политропой с $n = 1.5$ – см. Задачу VIII.2. В таком случае имеем:

$$T_0 \propto \frac{M}{R}, \quad \rho_0 \propto \frac{M}{R^3}, \quad \frac{T_0^{3/2}}{\rho_0} = \frac{T_{ef}^{3/2}}{\rho_{ph}},$$

где T_0 , ρ_0 – температура и плотность в центре звезды, а T_{ef} , ρ_{ph} – аналогичные величины на уровне фотосферы.

Из соотношений (IX.10), (IX.11) также следует, что:

$$L \propto R^2 T_{ef}^4, \quad \rho_{ph} T_{ef} \propto \frac{M}{R^2 \kappa_{ph}}.$$

В фотосферах молодых звезд с $T_{ef} < 6500$ К (спектральный класс позднее G0) непрозрачность определяется отрицательными ионами водорода, поэтому, согласно

(VII.15), можно написать:

$$\kappa_{ph} \propto T_{ef}^4 \rho_{ph}^{0.5},$$

Комбинируя эти соотношения получим трек Хаяши:

$$\lg L \propto 62 \cdot \lg T_{ef}. \quad (\text{X.4})$$

Таким образом на стадии Хаяши сжатие звезды происходит почти при постоянной T_{ef} , а ее трек на диаграмме Г-Р выглядит как почти вертикальная линия. Это означает, что $L \propto R^2$.

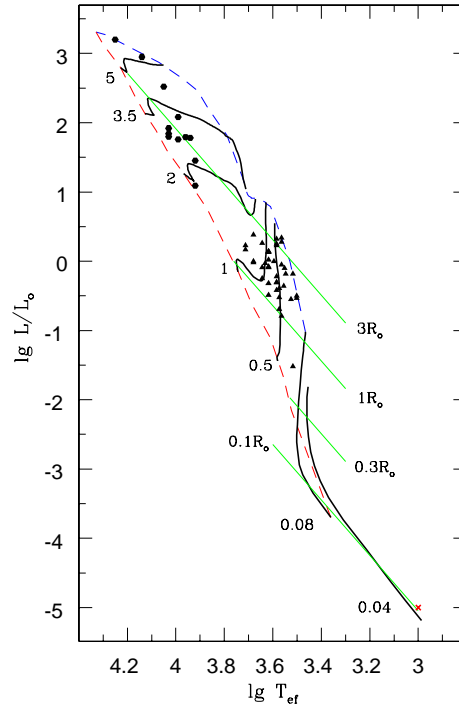


Рис. X.2: Эволюционные треки молодых звезд. Кружками отмечено положение Ae/Be звезд Хербига, треугольниками – звезд типа Т тельца, а крестиком – коричневого карлика Gliese 229B.

С другой стороны, согласно (IX.5),

$$L \propto -\frac{dU}{dt} \propto \frac{d(M^2/R)}{dt} \propto -\frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} \implies \frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} \propto -R^2 \implies R \propto t^{-1/3},$$

т.е. по мере приближения к ГП сжатие замедляется.

Во внутренних слоях звезды $\kappa \propto \rho T^{-7/2}$ (закон Крамерса). Поскольку в конвективной зоне $\rho(r) \propto T(r)^{3/2}$, получаем, что $\kappa(r) \propto 1/T(r)^2$, т.е. имеет минимальное значение в центральной области. По мере сжатия температура в центре T_0 растет, т.к. $T_0 \propto M/R$, поэтому вначале в центре, а затем и в его окрестности вещество становится все более прозрачным для излучения. В результате у молодых звезд с $M > 0.8 M_\odot$ формируется лучистое ядро и они переходят на т.н. лучистый трек.

Оценка времени, которую молодые звезды проводят на этой стадии эволюции, может быть получена почти так же, как и на стадии Хаяши. Действительно, поскольку эволюция звезды определяется скоростью высвечивания запасов гравитационной энергии, для времени сжатия (contraction) можно написать:

$$t_c \sim \frac{U_0 - U}{L} \approx -\frac{U}{L} \approx \frac{GM^2}{RL}, \quad (\text{X.5})$$

где радиус молодой звезды R и ее светимость L соответствуют моменту, для которого оценивается возраст. Мы также учли, что исходный радиус облака $\gg R$ и на этом основании пренебрегли величиной U_0 .

Найдем форму эволюционного трека, по которому движется сжимающаяся звезда на диаграмме Г-Р, когда перенос тепла в ней осуществляется излучением. Будем предполагать, что структура звезды при этом может быть аппроксимирована политропой с $1.5 < n < 5$. Кроме уже известных выражений

$$T_0 \propto \frac{M}{R}, \quad \rho_0 \propto \frac{M}{R^3}, \quad P_0 \propto \frac{M^2}{R^4}, \quad (\text{X.6})$$

это допущение, с учетом (VIII.9), позволит нам записать выражение (VII.12) для ∇_{rad} в центре звезды в виде:

$$\frac{\kappa_0 P_0}{T_0^4} \left(\frac{L_r}{m} \right)_0 \propto \frac{1}{n+1} = const, \quad (\text{X.7})$$

где индекс 0 у отношения L_r/m показывает, что речь идет о пределе, к которому стремится эта величина при $r \rightarrow 0$.

Из соотношения (IX.14) следует, что вблизи центра звезды (при отсутствии ядерного энерговыделения и нейтринного излучения):

$$\frac{L_r}{m} \approx - \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_0 + \frac{P_0}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_0.$$

Если заменить производные по времени от величин E и ρ на отношения E_0/t_c и ρ_0/t_c , то с учетом (X.5) в случае идеального больцмановского газа получим:

$$\left(\frac{L_r}{m} \right)_0 \approx \frac{1}{t_c} \cdot \left(E_0 + \frac{P_0}{\rho_0} \right) \propto \frac{T_0}{t_c} \propto \frac{T_0 RL}{M^2} \propto \frac{L}{M}.$$

Если дополнительно предположить, что в центре звезды непрозрачность определяется законом Крамерса, то с помощью выражений (X.6) соотношение (X.7) запишется в виде:

$$L \propto \frac{M^{11/2}}{R^{1/2}}.$$

Исключив R с помощью граничного условия $L \propto R^2 T_{ef}^4$ окончательно получим зависимость, определяющую т.н. "лучистый трек":

$$\lg L \propto 0.8 \cdot \lg T_{ef}. \quad (10.4)$$

Звезды с $M < 0.8 M_\odot$ приходят на главную последовательность полностью конвективными. По мере их сжатия T_0 растет, но отношение T/T_F уменьшается, т.к. оно $\propto T/\rho^{2/3} \propto M^{1/3} R$, причем быстрее для звезд малых масс. У звезд с $M < 0.08 M_\odot$ давление вырожденного газа останавливает рост T_0 прежде чем она поднимется до величины, необходимой для того, чтобы ядерные реакции поддерживали тепловой баланс звезды. Такие объекты называют коричневыми карликами, а значение $0.08 M_\odot$ – пределом Кумара (S.Kumar, 1963).

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Когда начинается вырождение электронного газа

$$P = \rho \Re T / \mu_i + K_0 \rho^{5/3}. \quad (X.8)$$

Поскольку в политропной звезде

$$P_0 \propto M^2 / R^4$$

и

$$\rho_0 \propto M / R^3,$$

имеем для параметров газа в центре:

$$T_0 = a_1 \frac{P_0}{\rho_0} - b_1 \rho_0^{2/3} = a_2 \frac{M}{R} - b_2 \frac{M^{2/3}}{R^2}, \quad (10.5)$$

где a_i, b_i – постоянные величины для данного индекса политропы. Тогда:

$$\frac{dT_0}{dR} = -\frac{a_2 M^{2/3}}{R^2} \left(M^{1/3} - \frac{2b_2}{Ra_2} \right) \implies T_0 = T_0^{max} = \frac{a_2^2 M^{4/3}}{4b_2} \quad \text{при} \quad R = R_1 = \frac{2b_2}{a_2 M^{1/3}}.$$

Существенно, что после того, как R станет $< R_1$ величина T_0 начнет уменьшаться!

[17]

Ближайший к нам коричневый карлик находится всего в 4 пк от Солнца и имеет $T_{ef} \approx 500$ К – см. arXiv: 1004.0317 ???

Общее время сжатия до главной последовательности (шкала Кельвина-Гельмгольца) получается из соотношения (X.5), если подставить в нее значения R и L на начальной главной последовательности:

$$t_{KH} \sim \frac{GM^2}{RL} \approx 3 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \frac{R_\odot}{R} \frac{L_\odot}{L} \text{ лет.} \quad (X.9)$$

t_{KH} падает с ростом массы, поскольку на ГП (см. следующую Лекцию) $L \propto M^n$, где $n > 2$ и $R \propto M$, так что

$$t_{KH} \propto M^{-n}.$$

Например, для молодых звезд с $M \approx 7 M_\odot$ $t_{KH} \sim 3 \cdot 10^5$ лет, а для звезд с $M < 0.2 M_\odot$ $t_{KH} > 10^9$ лет.

Перед главной последовательностью у звезд с $M > 0.8 M_\odot$ в центре появляется конвективная зона, но при $M > 2 M_\odot$ она исчезает еще до прихода на ГП, а у звезд меньших масс – после начала реакций $p - p$ цепочки.

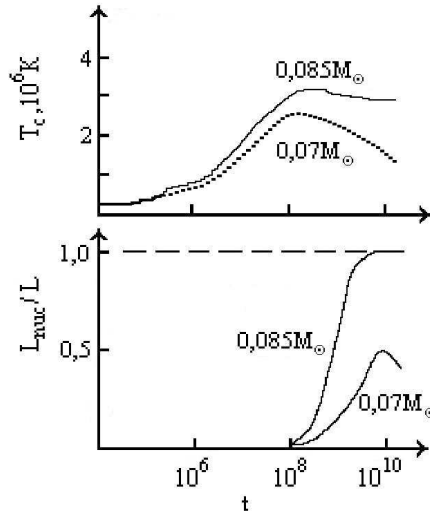


Рис. X.3: Изменение центральной температуры и относительного вклада ядерной светимости с течением времени у звезд вблизи предела Кумара.

X.4 Особенности коллапса при учете вращения облака

Из-за дифференциального вращения Галактики протозвездные облака вращаются вокруг оси, т.е. имеют ненулевой угловой момент $J_o \approx M_o R_o^2 \omega$. В процессе коллапса величина J_o почти не меняется, поэтому скорость вращения облака растет ($\omega \propto R^{-2}$), и оно приобретает форму эллипсоида. Если J достаточно велико, в какой то момент центробежная сила на экваторе $\omega^2 R$ станет больше силы тяготения GM/R^2 , и облако распадается на два фрагмента (двойную систему). При этом угловой момент облака перейдет в орбитальный момент системы, что позволит каждой из протозвезд продолжать сжатие. Если исходный момент облака достаточно велик, фрагментация может повториться еще (несколько) раз. Таков один из возможных механизмов формирования двойных и кратных систем.

Если же исходный угловой момент облака не слишком велик, то в конце коллапса образуется сравнительно медленно вращающаяся молодая звезда, окруженная газопылевым диском, причем $M_d \leq 0.01 M_o$, но $J_d \approx J_o$. Объекты этого типа отождествляют с неправильными переменными звездами типа Т Тельца. С наблюдательной точки зрения – это субгиганты спектральных классов F5–M, в спектре которых наблюдаются эмиссионные линии водорода и некоторых других элементов. Кроме того, для них характерно избыточное (по сравнению со звездами ГП тех же спектральных классов) излучение в УФ и ИК континууме. "Средние" значения параметров звезд Т Тельца: $M = 0.8 M_\odot$, $R = 2 R_\odot$, период осевого вращения $P_{rot} = 3^d$, индукция магнитного поля у поверхности $B \sim 1 - 3$ кГс, возраст – от 10^5 до 10^7 лет.

Из-за вязкого трения вещество диска аккрецирует на центральную звезду с темпом аккреции \dot{M}_{ac} , величина которого лежит в интервале $10^{-9} - 3 \cdot 10^{-7} M_\odot/\text{год}$.

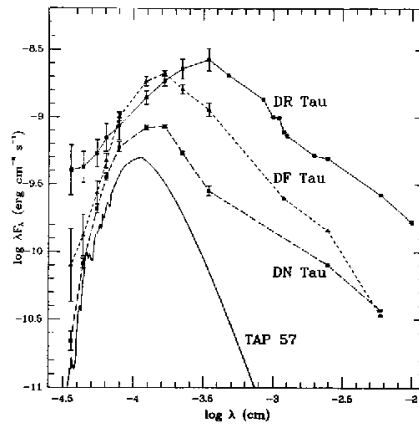


Рис. X.4: Спектры звезд типа Т Тельца

Магнитное поле звезды останавливает диск на расстоянии $\sim 1-3 R_*$ от поверхности. Вещество диска вмораживается в магнитные силовые линии, и вдоль них соскальзывает к поверхности, разгоняясь гравитационным полем до скорости ~ 300 км/с. При столкновении газа с поверхностью звезды возникает ударная волна, в которой кинетическая энергия аккрецируемого газа трансформируется в излучение, которое ответственно за наблюдаемую эмиссию в линиях и континууме.

У некоторых звезд Т Тельца наблюдалось увеличение блеска в сотни раз, вероятно, связанные с увеличением \dot{M}_{ac} до величины $\sim 10^{-4} M_\odot/\text{год}$. По имени звезды FU Ori объекты этого типа, которых известно сейчас несколько штук, называют фуорами. Основной вклад в наблюдаемый спектр фуоров дает не звезда, а аккреционный диск, т.е. $L_* < L_{ac} = G M \dot{M}_{ac} / R$. По-видимому, неустойчивости в диске, приводящие к росту \dot{M}_{ac} , происходят у молодых звезд с возрастом менее 1 млн. лет.

Дисковую аккрецию сопровождает истечение вещества с поверхности внутренних областей диска – т.н. дисковый ветер. Темп потери массы у звезд типа Т Тельца $\dot{M}_w \sim 0.1 \dot{M}_{ac}$, а предельная скорость истечения $V_\infty \sim 300$ км/с. На расстояниях свыше 10 а.е. от звезды дисковый ветер коллимируется, образуя биполярные джеты. Ветер выметает остатки протозвездного облака.

Наличие дисков вокруг звезд типа Т Тау подтверждено наблюдениями. Эволюция диска определяется двумя процессами: а) истощением массы диска в результате аккреции и истечения газа; б) оседанием пыли к центральной плоскости. Если оседание пыли происходит достаточно быстро, начинается слипание пылинок и формирование все более и более крупных тел – зародышей планет. Если зародыши успевают вырасти до размера ~ 1 км до того как диск диссипирует, их дальнейший рост происходит, в основном, за счет аккреции окружающего газа. Т.о. планеты образуются из дисков, окружающих молодые звезды, поэтому эти диски называют протопланетными. В Солнечной системе свыше 98 % углового момента сосредоточено в орбитальном моменте планет-гигантов.

Молодые звезды промежуточной массы (от 3 до 8 M_\odot).

Качественно у этих звезд эволюция протекает так же, как и у менее массивных

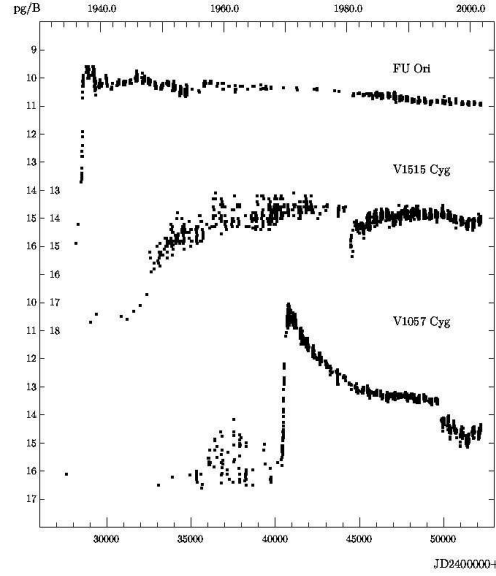


Рис. X.5: Кривые блеска фуоров FU Ori, V1515 Cyg и V1057 Cyg.

звезд, но у них нет конвективных зон вплоть до прихода на ГП. Объекты этого типа отождествляют с т.н. звездами Ae/Be Хербига – неправильными переменными спектральных классов B-F5 с эмиссией в линиях H I, He I и некоторых других элементов. У Ae/Be звезд Хербига также наблюдаются (протопланетные?) диски и биполярные джеты. Светимость и T_{eff} , а также скорость истечения ($V_{\infty} \sim 10^3$ км/с) и темп потери массы у Ae/Be звезд Хербига намного превышают аналогичные величины для звезд типа Т Тельца, поэтому они эффективно нагревают и рассеивают остатки протозвездного облака, препятствуя последующему звездообразованию.

Образование звезд с массой $\geq 8 M_{\odot}$

Из (10.1) следует, что продолжительность стадии протозвезды, определяемая временем сжатия внешних областей облака t_{ff} , тем больше, чем массивней облако, тогда как время превращения молодой звезды в звезду ГП t_{KH} , согласно (10.6), наоборот, уменьшается с ростом массы. При $M \geq 8 M_{\odot}$ величина t_{ff} становится больше t_{KH} . Это значит, что гидростатически равновесное ядро протозвезды успевает превратиться в звезду ГП еще до того, как коллапсирующая оболочка станет прозрачной в видимом диапазоне. Поэтому когда оболочка рассеется, перед нами предстанет уже сформировавшаяся звезда ГП. Примером может служить звезда η Car – одна из наиболее массивных звезд галактики: $M \approx 70 M_{\odot}$, $L \sim 10^6 L_{\odot}$. Иными словами, у звезд

с $M \geq 8 M_{\odot}$ стадия молодой звезды отсутствует – это видно из Рис.Х.2, на котором линия рождения пересекает начальную главную последовательность (НГП) в районе $8 M_{\odot}$. В Галактике известно почти 300 таких звезд-коконов, которые представляют собой яркие источники ИК излучения.

Воздействие формирующейся звезды большой массы на окружающий газ прото-звездного облака очень велико: давление излучения и ветра не только останавливает сжатие внешних областей, но и заставляет их двигаться в обратном направлении. В результате, масса звезды M_* оказывается заметно меньше массы родительского облака M_o , причем с ростом M_o отношение M_*/M_o быстро уменьшается. Например, при $M_o = 150 M_{\odot}$ $M_*/M_o < 0,5$. Возможно, это обстоятельство объясняет отсутствие в Галактике звезд с массой заметно превышающей $100 M_{\odot}$.

Ежегодно в Галактике рождаются звезды с общей массой $\sim 3 M_{\odot}$. Распределение рождающихся звезд по массам описывается т.н. начальной функцией масс. Согласно Солпитеру

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-2.35},$$

так что массивные звезды рождаются очень редко.

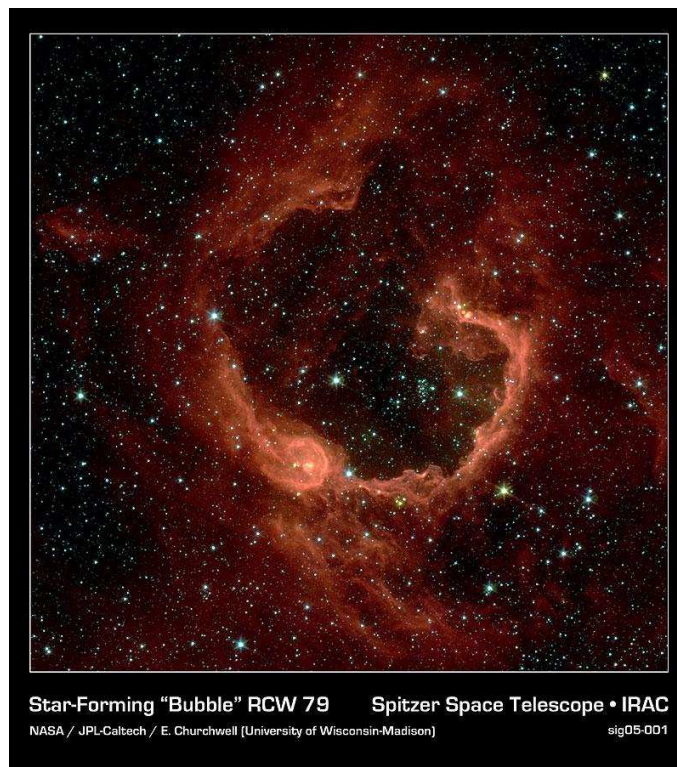


Рис. X.6: Изображение области недавнего звездообразования RCW 79, полученное с космической обсерватории SPITZER: нагрев газа излучением горячих звезд, а также их звездный ветер "очищают строительную площадку".

Глава XI

Строение и эволюция звезд главной последовательности

XI.1 Структура звезд главной последовательности

Модели звезд НГП с разумной степенью точности можно построить, полагая $dX_i/dr = 0$, $(\partial/\partial t)_m = 0$. Для Солнца подбирают химсостав и параметр конвекции α , чтобы получить наблюдаемые значения R и T_{ef} при наблюдаемом возрасте и химическом составе.

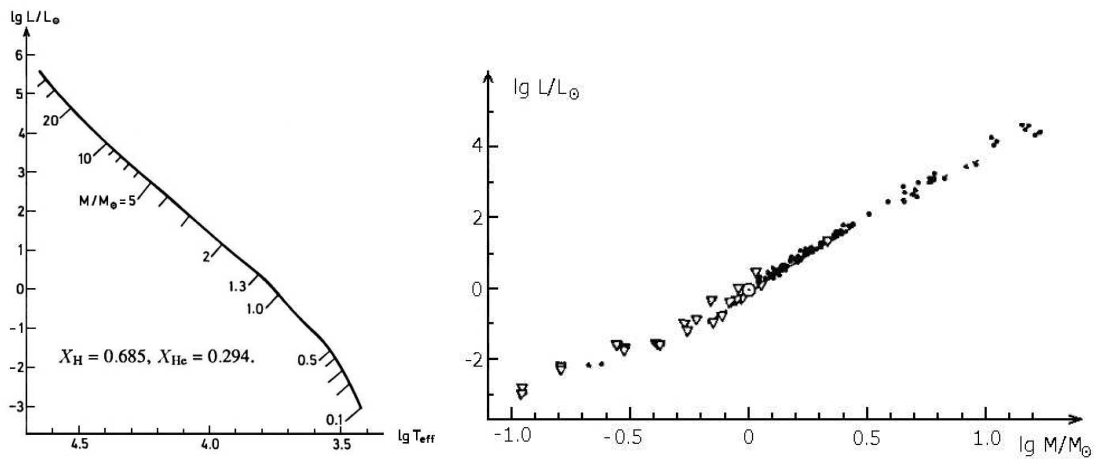


Рис. XI.1: Слева – НГП для звезд с $X_H = 0.685$, $Y = 0.294$, $Z = 0.001$. Справа – наблюдаемая зависимость светимость-масса, построенная по двойным звездам [29].

Таблица XI.1: Параметры звезд главной последовательности

Sp	T_{ef}, K	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	L/L_{\odot}	Sp	T_{ef}, K	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	L/L_{\odot}
O 3	53300	120	15.8	$1.8 \cdot 10^6$	F 5	6400	1.35	1.2	4.0
O 4	48200	60	10.6	$5.3 \cdot 10^5$	F 8	6100	1.20	1.1	2.5
O 7	38000	27	8.5	$1.4 \cdot 10^5$	G 0	5900	1.08	1.05	1.45
B 0	32000	16	5.7	$1.6 \cdot 10^4$	G 2	5800	1.00	1.00	1.10
B 3	17000	8.3	4.8	$2.5 \cdot 10^3$	G 5	5600	0.95	0.91	0.70
B 5	15000	5.4	3.7	750	G 8	5300	0.85	0.87	0.44
B 8	12500	3.5	2.7	130	K 0	5100	0.83	0.83	0.36
A 0	9500	2.6	2.3	63	K 2	4830	0.78	0.79	0.28
A 2	9000	2.2	2.0	40	K 5	4370	0.68	0.74	0.18
A 5	8700	1.9	1.8	24	M 0	3670	0.47	0.63	0.075
A 7	8100	1.8	1.7	11	M 2	3400	0.33	0.36	0.030
F 0	7400	1.6	1.5	9.0	M 3	3300	0.26	0.29	0.014
F 2	7100	1.5	1.3	6.3	M 4	3200	0.20	0.21	0.005

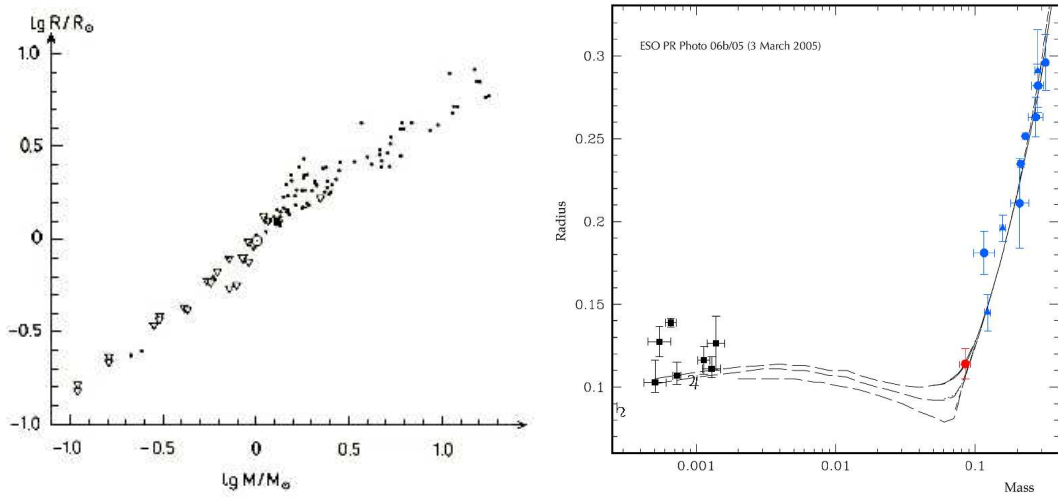


Рис. XI.2: Зависимость радиуса от массы звезд главной последовательности, коричневых карликов и планет-гигантов

XI.1.1 Зависимость $L(M)$ и $R(M)$ вдоль главной последовательности

Рассмотрим вначале звезды верхней части главной последовательности с массой $M \sim 30 M_{\odot}$. Из-за того, что горение водорода в их центральных областях происходит в CNO-цикле они имеют конвективное ядро, которое можно описать политропой с $n = 1.5$ – см. Задачу VIII.2. Ядро у этих звезд окружено оболочкой, в которой тепло переносится излучением, основной механизм непрозрачности – томсоновское рассеяние ($\kappa \approx \kappa_T$), а давление излучения много меньше давления газа. Структура такой

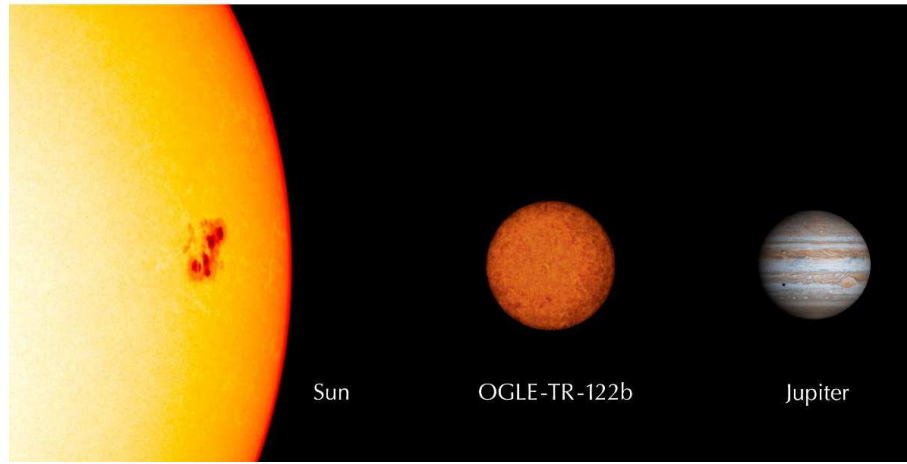


Рис. XI.3: Сравнение размеров Солнца, коричневого карлика OGLE-TR-122b и планеты Юпитер. Пресс-релиз ESO ???

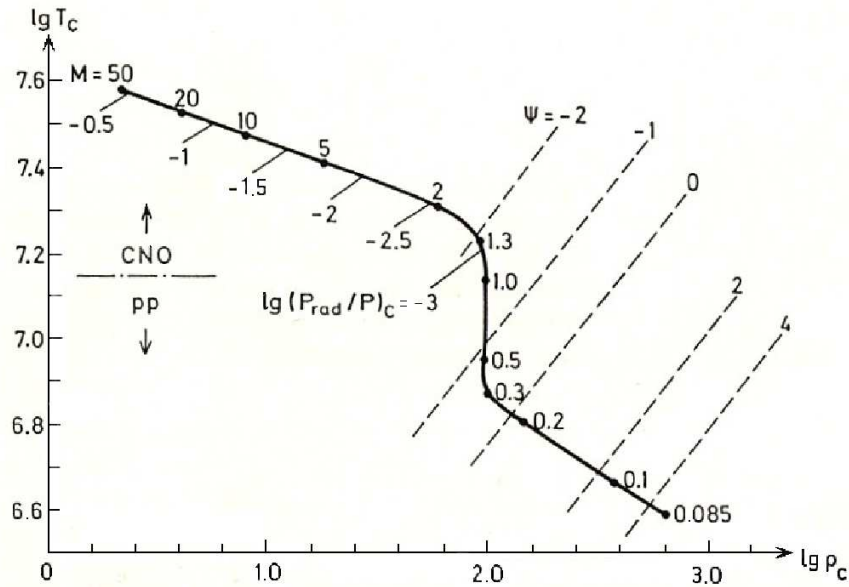


Рис. XI.4: Температура и плотность в центре звезд НГП разных масс.

оболочки в первом приближении может быть аппроксимирована политропой с $n = 3$ – см. Задачу VII.3. Следовательно, моделью рассматриваемых звезд может служить составная двухполитропная конфигурация, рассмотренная в разделе II.5.

Внешним граничным условием для этих звезд служит соотношение

$$\frac{T_{ef}^3}{\rho_{ph}} = \frac{L \kappa_T}{4\pi \sigma G M \mu_{ph}}, \quad (\text{XI.1})$$

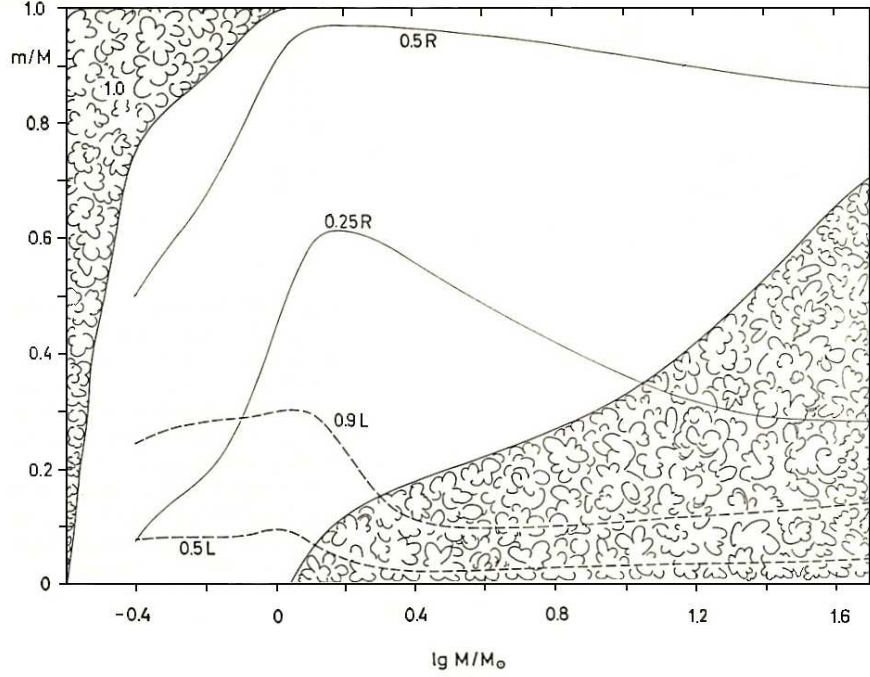


Рис. XI.5: Структура звезд НПП.

которое получается из выражений (IX.10) и (IX.11).

В точке сшивки конвективного ядра и лучистой оболочки выполняется условие $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$, что, с учетом (III.53) и (VII.12) дает:

$$\frac{3\Re\rho_c\kappa_T L}{64\pi G M_c \sigma \mu_c T_c^3} = \frac{2}{5}. \quad (\text{XI.2})$$

Сравнивая это выражение с предыдущим и учитывая, что в политропе с $n = 3$, состоящей из идеального газа, отношение T^3/ρ постоянно вдоль радиуса, получаем:

$$\frac{M_c}{M} \approx \frac{15\mu_{ph}}{32\mu_c}. \quad (\text{XI.3})$$

На начальной главной последовательности $\mu_c = \mu_{ph}$, поэтому мы приходим к выводу, что у рассматриваемых звезд масса конвективного ядра составляет $\approx 47\%$ всей массы звезды, т.е. отношение M_c/M постоянно. В задаче II.11 показано, что в такой ситуации $T_c^3/\rho_c \propto M^2$, поэтому, переписав (XI.2) в виде $L \propto M T_c^3/\rho_c$, получим, что у этих звезд масса и светимость связаны соотношением:

$$L \propto M^3. \quad (\text{XI.4})$$

Отметим, что из Рис.XI.5 видно, что, на самом деле, отношение M_c/M возрастает от 0.5 до 0.7 при изменении массы звезды от 20 до 45 M_\odot .

Если в дополнение к (XI.4) использовать соотношения (II.54), (VI.8) и (IX.10), записав их в виде:

$$\rho_0 \propto \frac{M}{R^3}, \quad T_0 \propto \frac{M}{R}, \quad L \propto \rho_0^{1/2} T_0^{s+3/2}, \quad L \propto T_{ef}^4 R^2,$$

то получим для массивных звезд начальной главной последовательности следующие соотношения:

$$T_{ef} \propto M^{1/4+2/(s+3)}, \quad R \propto M^{1-4/(s+3)}, \quad \rho_0 \propto M^{-2+12/(s+3)}, \quad T_0 \propto M^{4/(s+3)}. \quad (\text{XI.5})$$

Напомним, что s – это показатель степени, используемый при аппроксимации реальной функции $\varepsilon_{nuc}(T)$ степенной зависимостью T^s . У рассматриваемых звезд водород горит в CNO-цикле, для которого $s > 10$ (см. таблицу VI.1), поэтому, в первом приближении, полученные зависимости можно переписать в виде:

$$T_{ef} \propto M^{1/4}, \quad R \propto M^{3/4}, \quad \rho_0 \propto M^{-1}, \quad T_0 \propto M^{1/3}. \quad (\text{XI.6})$$

Используя определение Эддингтоновской светимости (VIII.8) соотношение (XI.1) можно записать в виде:

$$\frac{L}{L_{Ed}} = \frac{3}{4} \left(\frac{P_{rad}}{P_{gas}} \right)_{ph}. \quad (\text{XI.7})$$

В задаче III.8 показано, что у политропных звезд, состоящих из газа с уравнением состояния (III.49) и постоянной величиной μ , отношение $\delta = P_r/P_g$ убывает от центра наружу при $n < 3$ и не меняется при $n = 3$. Мы рассматриваем не очень массивные звезды, у которых в центре $\delta_0 \ll 1$. В их конвективном ядре, описываемого политропой с $n = 1.5$, величина δ_c будет становиться еще меньше по мере удаления от центра, и затем, достигнув минимального значения на границе ядра, перестанет меняться, поскольку оболочку мы аппроксимировали политропой с $n = 3$. Следовательно, у рассматриваемых звезд отношение $(P_{rad}/P_{gas})_{ph} \ll 1$. Согласно (XI.7), это означает, что у этих звезд светимость много меньше эддингтоновской.

Однако $L_{Ed} \propto M$, а $L \propto M^3$, поэтому чем больше масса звезды на начальной главной последовательности, тем ближе у нее отношение L/L_{Ed} к 1, и у звезд с массой свыше примерно $50 M_\odot$

$$L \approx L_{Ed} = \frac{4\pi cGM}{\kappa_T}, \quad \text{т.е.} \quad L \propto M. \quad (\text{XI.8})$$

По этой причине в расчетах, не учитывающих потерю массы, эволюционные треки самых массивных звезд на диаграмме $L - T_{ef}$ представляют собой горизонтальные прямые $L = const$. Однако, на самом деле, из-за близости L к L_{Ed} массивные звезды весьма интенсивно теряют массу, что, вследствие зависимости $L \propto M$, приводит к уменьшению светимости этих звезд с течением времени.

Ранее было показано, что чем массивнее звезда, тем больше в ее центральных областях вклад фотонного газа в полное давление – см. (III.56). У наиболее массивных звезд начальной главной последовательности вклад излучения становится определяющим. Поскольку $P_{rad} \propto T^4$, а P_0 , согласно (II.31), $\propto M^2/R^4$, получаем:

$$T_0 \propto \frac{M^{1/2}}{R}.$$

Если теперь использовать соотношения (XI.5), заменив второе из них на полученную зависимость, а вместо (XI.4) принять (XI.8), то для наиболее массивных звезд начальной главной последовательности получим:

$$T_{ef} \propto M^{5/(8s+24)}, \quad R \propto M^{(2s+1)/(4s+12)}, \quad \rho_0 \propto M^{(9-2s)/(4s+12)}, \quad T_0 \propto M^{5/(4s+12)}.$$

Поскольку $s \geq 10$, получаем следующие приближенные зависимости:

$$T_{ef} \approx const, \quad R \propto M^{1/2}, \quad \rho_0 \propto M^{-1/2}, \quad T_0 \approx const. \quad (XI.9)$$

Звезды с $M \approx M_\odot$

Мы видели, что структура внутренних областей Солнца хорошо описывается политропой с $n = 3$ – см. Рис. II.1. Согласно (VIII.9), такая модель описывает ситуацию, когда тепло переносится излучением при постоянном градиенте ∇_{rad} , что позволяет написать:

$$\frac{\varkappa_0 P_0}{T_0^4} \left(\frac{L_r}{m} \right)_0 \propto \frac{1}{n+1} = const, \quad (XI.10)$$

где индекс 0 у отношения L_r/m показывает, что речь идет о пределе, к которому стремится эта величина при $r \rightarrow 0$.

Из соотношения (IX.14) следует, что вблизи центра у звезд ГП, т.е. при отсутствии тепловыделения за счет работы сил тяготения и нейтринного излучения:

$$\frac{L_r}{m} \approx \varepsilon_{nuc}^0.$$

Основной источник энерговыделения у рассматриваемых звезд – протон-протонная цепочка, для которой можно написать:

$$\varepsilon_{nuc}^0 \propto X_0^2 \rho_0 T_0^s,$$

где, согласно Табл. VI.1, $s \approx 4$.

Если учесть, что в центре рассматриваемых звезд $P_0 \propto \rho_0 T_0 / \mu_0$, и принять, что непрозрачность описывается законом Крамерса (VII.9), то (XI.10) примет вид:

$$\rho_0^3 \propto \frac{\mu_0}{Z_0 X_0^2} T_0^{2.5}. \quad (XI.11)$$

Политропное приближение позволяет также утверждать, что:

$$T_0 \propto \frac{M}{R}, \quad \rho_0 \propto \frac{M}{R^3}, \quad \frac{T_0^3}{\rho_0} = \frac{T_{ef}^3}{\rho_{ph}}. \quad (XI.12)$$

Граничные условия на поверхности звезды дают два дополнительных соотношения:

$$L \propto T_{ef}^4 R^2, \quad \rho_{ph} T_{ef} \propto \frac{M}{R^2 \varkappa_{ph}}, \quad (XI.13)$$

причем, согласно (VII.15), в рассматриваемом случае $\varkappa_{ph} \propto T_{ef}^4 \rho_{ph}^{0.5}$.

Комбинируя эти соотношения получим, что для звезд ГП с массой $\approx M_\odot$:

$$L \propto M^{5.5}.$$

Субкарлики - звезды с пониженным содержанием металлов.

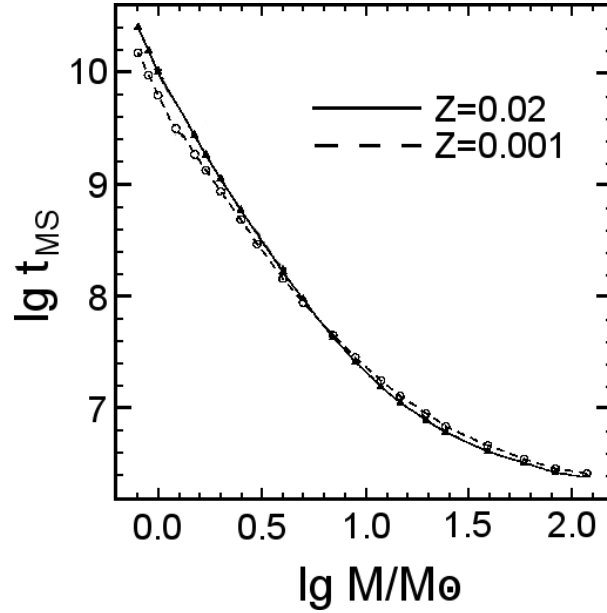


Рис. XI.6: Время жизни звезд на главной последовательности звезд разных масс с разным начальным химсоставом согласно [27].

Время жизни на ГП: $t_{MS} \sim 0.008c^2 \cdot 0.1M/L \propto 1/M^{n-1}$, т.е. массивные звезды живут на ГП меньше. При $X_H^0 = 0.602$, $X_{He}^0 = 0.354$ и $Z = 0.04$ $t_{MS} \approx 20, 33$ и 80 млн. лет для звезд с массами $8, 6$ и $4 M_\odot$ соответственно. Для Солнца $t_{MS} \approx 11$ млрд. лет, а у звезд с $M < 0.8M_\odot$ t_{MS} превышает возраст Вселенной.

Максимальная масса звезд:

Begelman M.C., *Evolution of supermassive stars as a pathway to black hole formation*, MNRAS 402, 673 (2010)

XI.2 Устойчивость ядерного горения в центральных областях звезд главной последовательности

Предположим, что в центральной области звезды, где происходят ядерные реакции, вследствие случайной флуктуации температура слегка увеличилась, причем за очень короткое время. Не приведет ли такое событие к катастрофической гибели звезды? Действительно, увеличение температуры должно сопровождаться увеличением скорости энерговыделения ε_{nuc} , которая, как мы знаем, весьма сильно зависит от температуры. Но это должно вызвать еще большее увеличение температуры, еще больший рост ε_{nuc} и так далее. Короче говоря, начнется лавинообразный рост энерговыделения, т.е. термоядерный взрыв – во всяком случае, именно так происходит взрыв термоядерной бомбы, в которой начальный рост температуры обеспечивается подрывом атомного заряда. Рассуждая аналогичным образом можно прийти к выводу, что небольшое случайное *понижение* температуры приведет к полному "вы-

ключению" термоядерного реактора звезды.

Однако приведенная цепочка рассуждений заведомо ошибочна – это ясно хотя бы из того, что такого рода события не происходят внутри Солнца, о чем свидетельствует практически постоянный поток нейтрино из его недр. Чтобы понять, в чем состоит ошибка, определим на примере Солнца, за какое время t_{nuc} будет происходить рост энерговыделения, если температура в центре звезды слегка увеличиться. Для оценки этого времени используем соотношение

$$t_{nuc} \sim \frac{E}{\varepsilon},$$

где $E = 1.5\mathcal{R}T/\mu$ – удельная тепловая энергия газа, а ε – скорость ядерного энерговыделения, в данном случае, в протон-протонной цепочке. В центре Солнца $E \approx 2 \cdot 10^{15}$ эрг/г, $\varepsilon_{pp}^{\odot} \approx 20$ эрг/г/с (см. стр. 88), так что $t_{nuc} \sim 3 \cdot 10^6$ лет. Таким образом нарастание темпа энерговыделения, если бы оно имело место, происходило бы за время, которое в десятки миллиардов раз превышает гидродинамическое время t_{hyd} даже для Солнца в целом – см. раздел I.5. Иными словами, гипотетический рост энерговыделения не должен нарушать механического равновесия звезд, подобных Солнцу.

Но оказывается, что при условии сохранения гидростатического равновесия лавинообразного нарастания энерговыделения в центре Солнца происходить не должно вообще. Поясним с помощью модельных расчетов, почему так происходит.

Рассмотрим небольшую область в окрестности центра политропной звезды, внутри которой плотность, давление и температуру можно в первом приближении считать постоянными и равными центральному значению ρ_0 , P_0 и T_0 .¹ Имея это в виду мы для краткости будем опускать индекс "0" в последующих выкладках.

Повышение температуры газа за время $\ll t_{hyd}$ приведет к повышению давления в области, и оно станет больше, чем давление, обусловленное весом вышележащих слоев. В результате область немного расширится. В рамках принятого приближения масса и радиус внутри области связаны соотношением:

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

Дифференцируя это равенство по времени при $m = const$ (лагранжева производная) получим:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{3\dot{r}}{r}. \quad (\text{XI.14})$$

Интерпретация этого результата очевидна: при расширении области ($\dot{r} > 0$) плотность газа уменьшается ($\dot{\rho} < 0$), а при сжатии – возрастает. Для политропной звезды с данной массой M связь между величинами P_0 и ρ_0 задается соотношением:

$$M = \frac{z_n (n+1)^{3/2}}{2\sqrt{\pi} G^{3/2}} \cdot \frac{P^{3/2}}{\rho^2},$$

¹Напомним, что в центре, т.е. при $r = 0$ производные этих величин равны нулю, поэтому равенство самих величин их значению в центре должно выполняться с точностью до малых второго порядка по r , т.е. рассматриваемая область не так уж и мала.

которое можно получить подставив выражение (II.2) в (II.25). Если пренебречь изменением индекса политропы с течением времени, т.е. принять, что $z_n(n+1)^{3/2} = \text{const}$, то продифференцировав это выражения по времени получим:

$$\frac{\dot{P}}{P} = \frac{4\dot{\rho}}{3\rho}. \quad (\text{XI.15})$$

Отсюда следует, что при уменьшении плотности ($\dot{\rho} < 0$) давление в области также должно уменьшаться ($\dot{P} < 0$).²

Чтобы выяснить, как при этом будет меняться температура в области, следует задать уравнение состояния газа, т.е. зависимость $P = P(\rho, T)$. Запишем эту зависимость в виде суммы давлений больцмановского газа ионов и сильно вырожденного ($T \ll T_F$) газа электронов – см. (X.8):

$$P = P_i + P_e^{\text{deg}} = \frac{\rho \mathcal{R} T}{\mu} + K_0 \rho^\gamma,$$

где величины μ , K_0 и γ – некоторые постоянные величины.

Дифференцируя это соотношение по времени и учитывая (XI.15) получим:

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{P_i + (4 - 3\gamma) P_e^{\text{deg}}}{4P_i} \cdot \frac{\dot{P}}{P} \quad (\text{XI.16})$$

Рассмотрим сейчас ситуацию, характерную для тех звезд главной последовательности, включая Солнце, в центральных областях которых можно пренебречь вырождением электронного газа. В этом случае следует положить $P_e^{\text{deg}} = 0$, и $1/\mu = 1/\mu_i + 1/\mu_e$, что приводит к соотношению:

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\dot{P}}{4P}, \quad (\text{XI.17})$$

из которого следует, что падение давления в зоне энергосвечения сопровождается понижением температуры.

Подведем итог сказанному. Случайное повышение температуры в центральной области звезды приводит к быстрому возрастанию давления газа, в результате чего область расширяется, и температура в ней уменьшается. Рассуждая аналогичным образом и используя соотношения (XI.14-XI.17) можно придти к заключению, что вслед за случайным понижением температуры последует ее увеличение. Но это означает, что у Солнца и подобных ему звезд температура в зоне энергосвечения после случайного повышения или понижения стремится вернуться к исходному значению. Таким образом, эти звезды ведут себя, как саморегулирующийся термоядерный реактор.

Рассмотрим теперь, каков механизм "саморегулировки". С точки зрения термодинамики, суть явления состоит в том, что из-за случайного повышения (понижения)

²Формула (XI.15) совпадает с соотношением (I.49), которое было получено для гомологичных звезд. Это связано с тем, что политропные звезды с одинаковым индексом гомологичны – см. задачу II.3.

температуры в зону энергосвечения поступает некоторое дополнительное количество тепла δQ (положительное или отрицательное), связанное с небольшим увеличением (уменьшением) скорости ядерных реакций. Это дополнительное тепло тратится на изменение внутренней энергии области $M_c dE$, где M_c – масса области, и на совершение работы δA по перемещению вышележащих слоев (вверх или вниз соответственно).

Запишем для рассматриваемой центральной области *в целом* соотношение, выражающее первый закон термодинамики в форме (III.11), явно выделив члены, связанные с изменением внутренней энергии области и совершаемой ею работы:

$$\frac{\delta Q}{M_c} = \underbrace{C_V dT}_{dE} + \underbrace{(C_P - C_V) dT - \frac{T K_1}{\rho^2 K_2} dP}_{\delta A}. \quad (\text{XI.18})$$

Поскольку $df = \dot{f} dt$, выражение (XI.17) можно записать в виде:

$$dP = \frac{4P}{T} dT.$$

С учетом этого обстоятельства и выражений для термодинамических производных больцмановского газа (см. раздел III.3.2), соотношение (XI.18) преобразуется к виду:

$$\frac{\delta Q}{M_c} = \underbrace{\frac{3\Re}{2\mu} dT}_{dE} - \underbrace{\frac{3\Re}{\mu} dT}_{\delta A} = -\frac{3\Re}{2\mu} dT \equiv C_* dT, \quad (\text{XI.19})$$

где величина

$$C_* \equiv -\frac{3\Re}{2\mu}, \quad (\text{XI.20})$$

представляет собой удельную теплоемкость рассматриваемого процесса, что следует из термодинамического определения понятия теплоемкости: $C \equiv dQ/dT$. Этот процесс – расширение или сжатие больцмановского газа, при которых сохраняется состояние гидростатического равновесия.

Поскольку, согласно (XI.20), теплоемкость данного процесса отрицательна, то это означает, что когда в область добавляется тепло ($\delta Q > 0$), то температура в ней уменьшается ($dT < 0$).³

Соотношение (XI.19) позволяет понять причину такого поведения: совершаемая газом (отрицательная) работа оказывается больше, чем приращение внутренней энергии. Аналогичные рассуждения показывают, что если из рассматриваемой области забрать часть тепла (за счет уменьшения скорости ядерных реакций), то работа внешнего давления с избытком компенсирует уменьшение тепловой энергии, что в результате приведет к нагреву газа. В этом и заключается механизм саморегулирования термоядерного реактора звезд подобных Солнцу.

³Во избежания недоразумений заметим, что в этом нет противоречия: законы термодинамики требуют, чтобы положительными были лишь теплоемкости C_V и C_P – см. [6], например. Отрицательную теплоемкость имеет и морозильная камера холодильника, в которой продукты охлаждаются в результате потребления энергии от электрической сети. При этом холодильник в целом имеет положительную теплоемкость – непонимание этого факта дорого обошлось многим абитуриентам...

Обратите внимание, что описанный выше механизм эффективно устраняет случайные флуктуации температуры за время $\sim t_{hyd}$. По этой причине нам не нужно было рассматривать, как эти флуктуации влияют на перенос тепла излучением или конвекцией в рассматриваемой области: характерное время изменения параметров процесса теплопереноса порядка теплового времени t_{th} , которое $\gg t_{hyd}$.

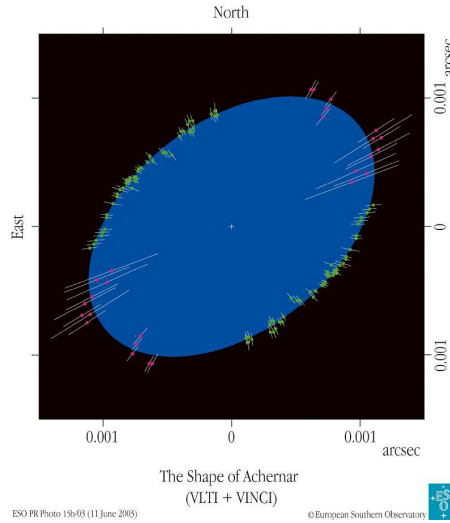


Рис. XI.7: Сплюснутая форма звезды Ахернар (α Eri) обусловлена быстрым осевым вращением. По данным VLTI.

XI.3 Изменение параметров звезд по мере выгорания водорода

Факторы, определяющие характер эволюции на ГП ($4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He} + 2e^+$):

- 1) Уменьшение числа частиц $\Rightarrow P \propto \mu^{-1} = 0.75 + 1.25X - 0.25Z$ падает;
- 2) Уменьшение количества $e \Rightarrow$ падает κ .

В результате по мере выгорания водорода ρ_c , T_c и светимость(!)растут. Изменение R не столь тривиально - см. Рис.XII.4,XII.6. Последствия роста ρ_c для звезд малой массы (вырождение e-газа).

По мере выгорания водорода молекулярный вес вещества в зоне энерговыделения μ_c увеличивается. В случае звезд верхней части главной последовательности, которые имеют конвективное ядро, это приводит к тому, что с течением времени относительная масса конвективного ядра уменьшается – это следует из соотношения (XI.3). Качественная картина того, как при этом происходит изменение содержания водорода в центральных областях таких звезд показана на Рис. XI.8. Считается, что стадия главной последовательности заканчивается, когда концентрация водорода в центре звезды становится меньше 0.01.

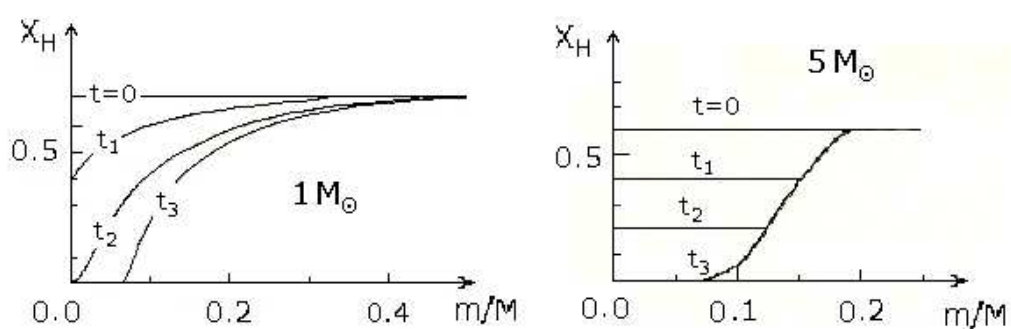


Рис. XI.8: Изменение концентрации водорода X_H с течением времени у звезд ГП: левый рисунок – для звезды с $M = 1 M_{\odot}$ (лучистое ядро); правый рисунок – для звезды с $M = 5 M_{\odot}$ (конвективное ядро, размер которого меняется в ходе эволюции).

Глава XII

Эволюция звезд с $M < 8M_{\odot}$ после главной последовательности

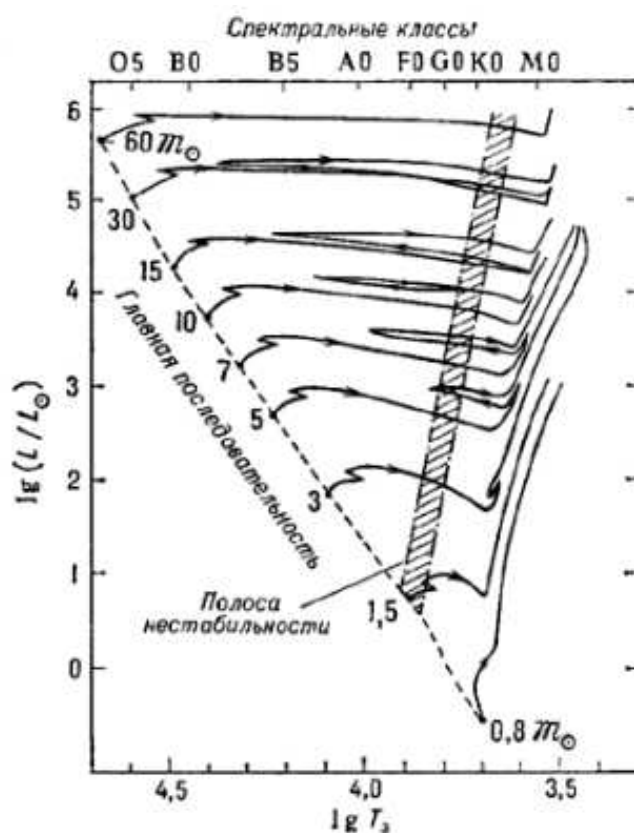


Рис. XII.1: Эволюционные треки звезд разных масс.

Общим свойством звезд в этом диапазоне масс является их конечная судьба: в конечном итоге эти звезды превращаются в белый карлик.

XII.1 Появление слоевого источника $\text{H} \rightarrow \text{He}$.

Как мы уже знаем, у звезд с $M > 1.3M_{\odot}$ на ГП имеется конвективное ядро, в котором происходит горение водорода, причем по мере превращения водорода в гелий светимость звезды немного увеличивается, а эффективная температура уменьшается – на диаграмме Г-Р эти звезды перемещаются вверх слева-направо.

Когда концентрация водорода в ядре X_H становится меньше некоторого критического значения, мощность ядерного энерговыделения оказывается меньше светимости звезды. Тогда звезда начинает сжиматься, чтобы дополнительным выделением тепла за счет работы сил тяготения скомпенсировать этот дефицит. В процессе сжатия на диаграмме Г-Р звезда движется, как и до ГП, по лучистому треку (см. стр.122):

$$\lg L = 0.8 \lg T_{ef} + \text{const},$$

т.е. вверх и справа-налево, в результате чего на треке появляется характерный излом.

При сжатии происходит уплотнение и нагрев внутренних областей звезды, и к тому моменту, когда водород в ядре полностью превратится в гелий, температура за пределами ядра поднимается настолько, что водород там начинает гореть столь же интенсивно, как и в ядре на главной последовательности. Таким образом область ядерного энерговыделения в звезде из центральной сферы превращается в сферический слой, который окружает ядро, состоящее из гелия с небольшой примесью тяжелых элементов. Этот слой принято называть слоевым источником.

У звезд с $M < 1.3M_{\odot}$ конвекции в ядре на ГП не было, поэтому слоевой источник формируется у этих звезд "естественным путем": он возникает, когда концентрация водорода в центре становится пренебрежимо малой – см. Рис. XI.8. По мере выгорания водорода толщина слоевого источника постепенно уменьшается. При этом эволюционный трек звезды на диаграмме Г-Р загибается в область низких температур.

И в том и в другом случае горение водорода в слоевом источнике происходит в CNO-цикле, а перенос тепла внутри области энерговыделения осуществляется излучением. Учитывая эти обстоятельства, а так же тот факт, что нейтринная светимость в рассматриваемой области много меньше фотонной, можно найти, как меняется светимость L_r^H внутри слоевого источника в зависимости от локальной концентрации водорода X_H (см. также задачу XII.1).

Мысленно выделим внутри слоевого источника сферическую поверхность с радиусом r , и перейдем в систему отсчета, связанную с этой поверхностью. За 1 секунду через поверхность сверху втекает $\dot{M}_H X_H$ грамм водорода, который в нижележащих слоях полностью превращается в гелий, выделяя энергию $\dot{M}_H X_H E_H$, где E_H – энергия, соответствующая превращению 1 г H в He. В стационарной ситуации, когда $\dot{M}_H(r) = \text{const}$, и параметры слоя мало меняются с течением времени, вся эта энергия уносится излучением, поэтому:

$$L_r^H = \dot{M}_H X_H E_H, \quad L^H = \dot{M}_H X_H^0 E_H. \quad (\text{XII.1})$$

Второе соотношение, в котором L^H и X_H^0 – полная светимость слоевого источника и содержание водорода в оболочке звезды соответственно, получается из первого, если в качестве поверхности выбрать внешнюю границу слоевого источника.

Таким образом, водород вещества оболочки, проходя через слоевой источник, превращается в гелий и оседает на гелиевое (с небольшой примесью тяжелых элементов) ядро. По сути дела, происходит аккреция вещества оболочки на ядро звезды, масса которого каждую секунду увеличивается на величину \dot{M}_H . Можно также сказать, что при этом происходит движение слоевого источника от центра звезды к ее поверхности с (лагранжевой) скоростью \dot{M}_H .

Так или иначе, но с увеличением массы ядра плотность и температура вещества в нем становятся все больше и больше. Отметим, кстати, что при выводе (XII.1) мы пренебрегли светимостью гелиевого ядра L_{He} , обусловленную работой сил тяготения при увеличении его массы, однако $L_{He} \ll L_H$, поскольку эволюция происходит не в тепловой, а в ядерной шкале времени.

Дальнейшая эволюция происходит по-разному у звезд разной массы.

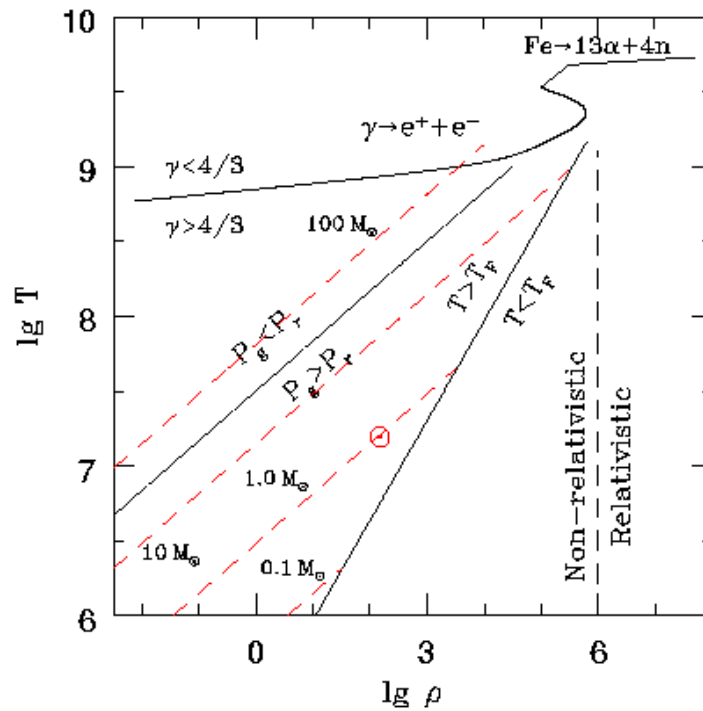


Рис. XII.2: Схема, поясняющая характер эволюции центральных областей звезд разных масс.

XII.2 Звезды малой массы ($M < 0.5M_{\odot}$)

В центральных областях звезд с массой $< 0.5 M_{\odot}$ электронный газ близок к вырождению уже на главной последовательности – см. Рис.XII.2. Когда у этих звезд появляется слоевой источник, нижележащее гелиевое ядро, по мере увеличения его массы M_c , становится все более и более плотным. И хотя рост плотности сопровождается ростом температуры, отношение T/T_F в ядре уменьшается с течением времени, т.е. степень вырождения электронного газа нарастает.

Из-за высокой плотности гелиевое ядро у этих звезд имеет сравнительно небольшие размеры R_c . По этой причине непосредственно за пределами ядра, т.е. в слоевом источнике, давление убывает наружу очень быстро. Действительно, согласно (I.20), $dP/dm \propto -M_c/R_c^4$, поэтому на расстоянии $\Delta r \ll R_c$ величина P уменьшается на несколько порядков. Это, в свою очередь, означает, что вес оболочки звезды, лежащей над слоевым источником, сравнительно мал и от его точного значения структура слоевого источника должна зависеть слабо. Именно по этой причине в численных расчетах получается, что у рассматриваемой группы звезд слоевой источник имеет "универсальную" структуру, которая, главным образом, определяется массой и радиусом гелиевого ядра. Впрочем, параметры слоевого источника также зависят от химического состава оболочки, а точнее от содержания H, C, N и O.

В соответствии со сказанным, можно показать аналитически (см. задачу XII.2), что если зависимость скорости энерговыделения в CNO-цикле аппроксимировать степенной функцией $\varepsilon_{CNO} \propto T^s$, то температура в основании слоевого источника T_c и его светимость L_H будут зависеть от параметров ядра следующим образом:

$$T_c \propto \frac{M_c}{R_c}, \quad L_H \propto M_c^{(s+8)/3} R_c^{-(s+3)/3}. \quad (\text{XII.2})$$

Если в качестве ориентира положить $s = 14$, что, согласно Табл.VI.1, соответствует температуре ≈ 20 млн. К, то получим, что $L_H \propto M_c^{22/3} R_c^{-17/3}$. Как было сказано выше, по мере увеличения массы ядра, его радиус уменьшается, поэтому из численных расчетов получается, что светимость слоевого источника, а вместе с ней и светимость звезды растут по мере увеличения массы гелиевого ядра очень быстро (примерно по закону $L_H \propto M_c^9$). По той же причине, хотя гораздо медленней, растет и температура T_c , а с ней и центральная температура T_0 .

С течением времени светимость и температура ядра нарастают все быстрее и быстрее. Действительно, согласно (XII.1), $M_H \propto L_H \propto M_c^9$, т.е. чем больше масса ядра, тем с большей скоростью она увеличивается, и тем, стало быть, быстрее увеличиваются L_H и T_c .

Рост светимости звезды сопровождается сильным увеличением ее радиуса и небольшим понижением эффективной температуры – звезда превращается в красного гиганта. Уже на главной последовательности звезды с массой $M < 0.8 M_{\odot}$ имеют внешние конвективные зоны, глубина которых возрастает по мере роста массы гелиевого ядра. В результате маломассивные звезды перемещаются на диаграмме Г-Р по треку Хаяши, но в обратном, по сравнению с молодыми звездами, направлении (см. Рис.XII.3), причем чем выше звезда поднимается по треку, тем быстрее она по нему движется.

Сильное вырождение электронного газа в ядрах звезд малой массы препятствует повышению их центральной температуры до величины $\approx 10^8$ К, начиная с которой гелий интенсивно превращается в углерод. Происходит это по той же причине, по которой молодые звезды с массой менее $0.08 M_{\odot}$ становятся не звездами главной последовательности, а коричневыми карликами – см. стр. 123 и Рис. X.3.

С течением времени слоевой источник сдвигается все ближе к поверхности, утончается и в конце концов пропадает, когда звезда становится красным гигантом. На этой стадии оболочка звезды истекает в окружающее пространство (сбрасывается). По мере сброса оболочки обнажаются внутренние, более горячие слои, в результате чего трек звезды из области красных гигантов уходит влево в область звезд с очень высокой T_{ef} . В конечном итоге от звезды остается сильно вырожденное ядро, состоящее из гелия с небольшой примесью углерода в центральных областях, которое окружено тонкой оболочкой из горячего, невырожденного газа. Эта конфигурация постепенно остывает и звезда превращается в белый карлик – см. раздел XIII.2.

Следует отметить, что время, которое необходимо звездам с $M < 0.8M_{\odot}$ для превращения в белый карлик, превышает возраст Вселенной. Все известные гелиевые белые карлики, сформировались в двойных системах из звезд с массой гораздо больше $0.8 M_{\odot}$, которые сбросили основную долю своей массы на соседнюю звезду.

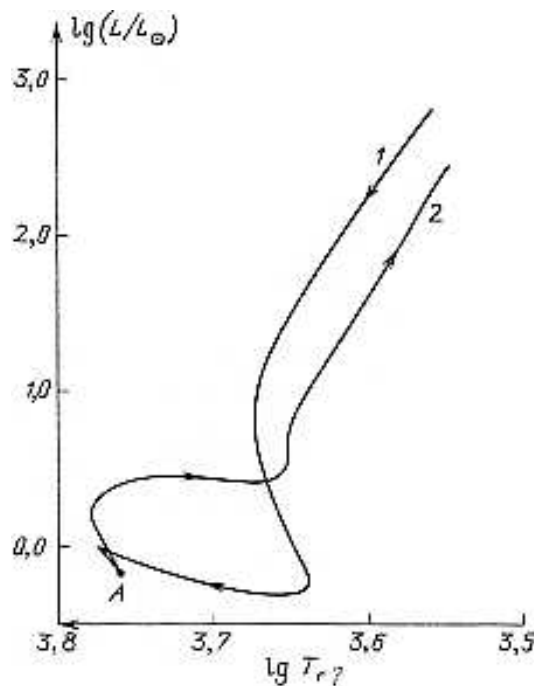


Рис. XII.3: Эволюционные треки Солнца до и после прихода на ГП.

ХII.3 Эволюция звезд с $M > 0.5 M_{\odot}$ до формирования углеродного ядра

ХII.3.1 Звезды с массой $0.5M_{\odot} < M < 2.3M_{\odot}$

Вначале тот же путь, что и у маломассивных звезд, но вырождение не столь велико и T_0 достигает значения $\sim 10^8$ К, после чего начинается горение гелия: $3 \cdot {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C}$. Электронный газ при этом является нерелятивистским: $\lg \rho < 6$, $\gamma = 5/3$.

Поскольку в вырожденном газе давление слабо зависит от температуры, механизм саморегулирования ядерного горения, описанный в разделе XI.2, не работает. Действительно, случайное повышение температуры в области ядерного энерговыделения приведет к повышению давления, в результате чего эта область немного расширится, после чего плотность газа в ней уменьшится. Согласно (XI.15), это приведет к уменьшению давления, как и в центре Солнца. Однако если на Солнце падение давления сопровождается охлаждением газа, то теперь из соотношения (XI.16), с учетом того, что $P_i \ll P_e^{deg}$, т.е. $P \approx P_e^{deg}$, следует:

$$\frac{\dot{T}}{T} \approx -\frac{\dot{P}}{4P_i}, \quad (\text{ХII.3})$$

т.е. падение давления ($\dot{P} < 0$) будет сопровождаться еще большим нагревом газа. Повышение температуры, в свою очередь, приведет к росту энерговыделения при горении гелия, что вызовет еще большее повышение температуры и т.д.

Это приводит к тому, что в центральной области звезды происходит термоядерный взрыв, который получил название гелиевой вспышки. Вследствии этого на нескольких секундах светимость ядра возрастает до величины $\sim 10^{10} L_{\odot}$! Однако при повышении температуры электронный газ перестает быть вырожденным, и включается механизм саморегулирования: ядро расширяется, температура падает и горение гелия начинает происходить в стационарном режиме. Расчеты показывают, что почти вся выделенная при гелиевой вспышке энергия поглощается при расширении ядра и оболочки: внешние параметры звезды меняются плавно в тепловой шкале времени.

Из-за наличия нейтринных потерь непосредственно перед началом вспышки максимум температуры достигается не в центре звезды. Действительно, до того как гелий загорится для центральной области, лежащей под слоевым источником, можно написать:

$$\left(\frac{\partial L_m}{\partial m} \right)_t = -\varepsilon_{\nu} < 0,$$

т.е. светимость убывает от центра наружу. Но в центре звезды $L(0) = 0$, поэтому вплоть до слоевого источника $L_m < 0$. Это значит, что тепло от слоевого источника течет не только наружу, но и в нижележащие слои, где его уносит нейтрино. С другой стороны, согласно (VII.10), $dT/dr \propto -L_r \propto -L_m$. Поскольку в ядре светимость отрицательна, то получаем, что там $dT/dr > 0$. Поскольку в слоевом источнике dT/dr , конечно же, < 0 , приходим к выводу, что максимум температуры достигается не в центре звезды, а на внешней границе ее ядра. По этой причине взрывное горение гелия также начинается на периферии ядра, и лишь потом охватывает все ядро.

При горении He $\Delta m/\text{нуклон} = (12.0111 - 3 \cdot 4.0026)/12 \approx 2.6 \cdot 10^{-4} \Rightarrow t_{nuc}^{He} \sim 3 \cdot 10^{-4} * 0.1 M_* c^2 / L_*$, т.е. $\ll t_{nuc}^H$.

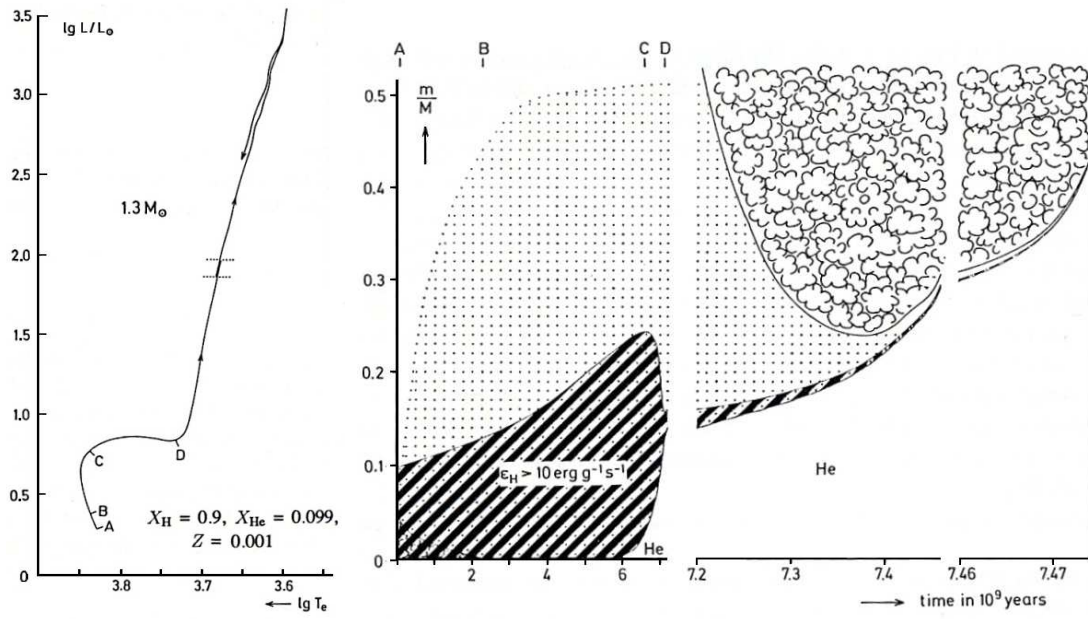


Рис. XII.4: Эволюция звезды с $M=1.3 M_{\odot}$

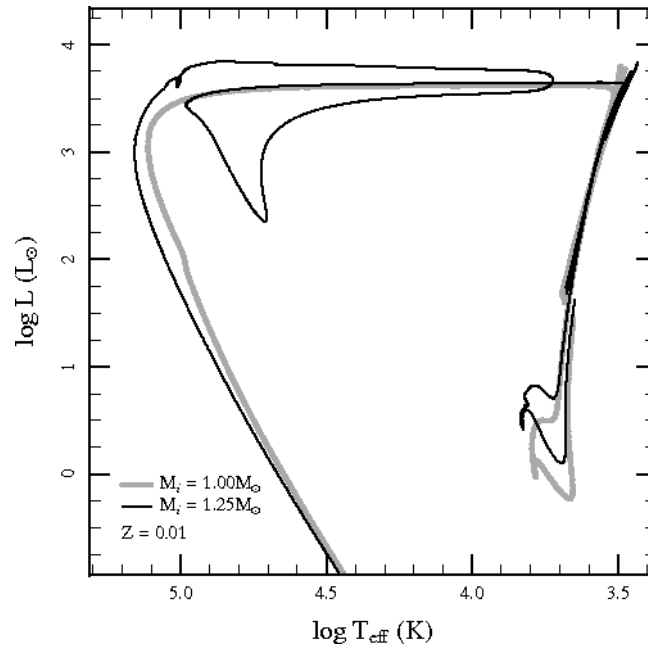


Рис. XII.5: Эволюционные треки звезд с массой 1 и $1.25 M_{\odot}$. Код MESA, $Z = 0.01$

ХИ.3.2 Звезды с массой $> 2.3 M_{\odot}$

После возникновения слоевого источника происходит постепенное превращение водорода в гелий на внешней границе гелиевого ядра. Отличительная особенность звезд с $M > 2.3 M_{\odot}$, по сравнению с менее массивными, состоит в том, что в их центральных областях электронный газ далек от вырождения.

Масса гелиевого ядра постепенно увеличивается, однако происходит это в ядерной шкале времени, поэтому скорость выделения гравитационной энергии в области под слоевым источником много меньше, чем светимость слоевого источника. Температура газа в центральных областях звезды на этом этапе не превышает 30 млн. К, поэтому гелий в ядре гореть не может, а нейтринное излучение практически не генерируется. Из закона сохранения энергии (IX.3) следует, что в этой ситуации

$$\left(\frac{\partial L_m}{\partial m} \right)_t \approx 0,$$

т.е. $L_m(m) = \text{const}$. Но в центре звезды $L_m = 0$, следовательно поток тепла $L_m \approx 0$ и внутри всего ядра. Согласно (VII.10) это значит, что градиент температуры внутри ядра очень мал и оно, практически, изотермично.

Таким образом эволюция на стадии горения водородного слоевого источника сводится к постепенному увеличению массы изотермического гелиевого ядра M_c . В 1942 г. Шёнберг и Чандрасекар [30] на основании численных расчетов показали, что масса гелиевого ядра может увеличиваться лишь до определенного предела, после чего происходит перестройка структуры звезды и меняется характер ее эволюции: ядро звезды начинает сжиматься в тепловой шкале времени T_{KH} , а оболочка расширяется, и звезда превращается в красного гиганта. Поскольку переход звезды из одной области диаграммы Г-Р в другую (участок CD на Рис. XII.6) происходит быстро ($t = T_{KH} \ll t_{nuc}$) в промежуточной области наблюдается дефицит звезд – т.н. провал Герцшпрунга.

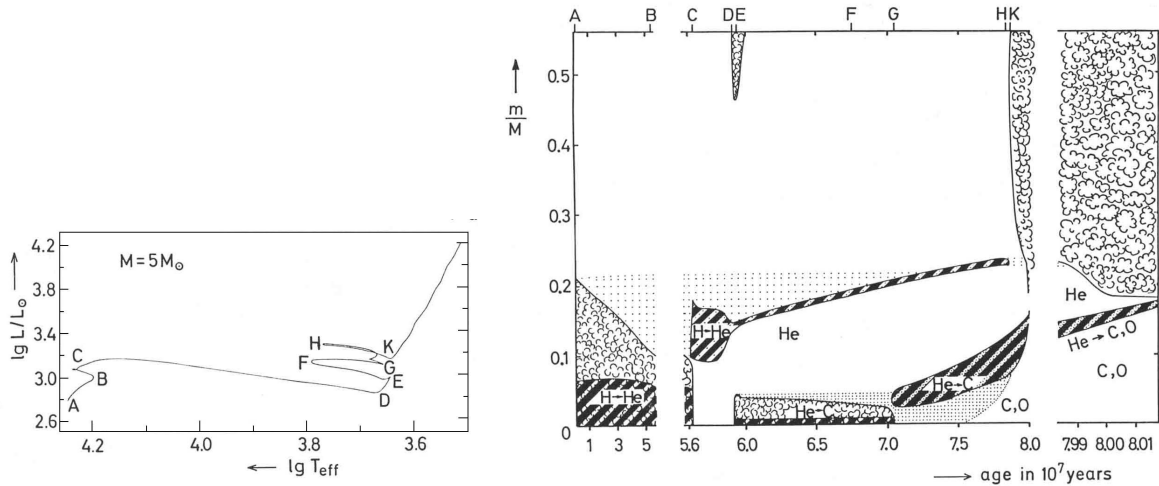


Рис. XII.6: Эволюция звезды с $M=5 M_{\odot}$ и $X_H = 0.602$, $Y = 0.354$, $Z = 0.044$.

Причина резкого изменения характера эволюции звезды заключается в следующем. В разделе II.4 было показано, что давление на границе изотермического шара с массой M_c не может превышать предельное значение P_s^{max} , величина которого, согласно (II.46), обратно пропорциональна M_c^2 . Это значит, что по мере увеличения массы гелиевого ядра давление на его внешней границе уменьшается. С другой стороны, мы знаем (см. стр. 12), что давление, обусловленное весом оболочки, не может быть меньше некоторого минимального значения P_b^{min} , которое, в частности, зависит от полной массы звезды M . Оказывается, что при $M_c/M > \approx 0.1$ величина P_b^{min} становится больше P_s^{max} , т.е. создаваемое оболочкой давление превышает максимально возможное давление на границе гелиевого ядра – см. задачу XII.3. Это приводит к тому, что когда масса изотермического ядра достигает величины $\sim 0.1 M$, называемой пределом Шенберга-Чандрасекара, ядро начинает сжиматься.

Сжатие ядра приводит к выделению тепла, обусловленному работой сил тяготения. Чтобы отвести это тепло наружу в ядре возникает градиент температуры, и ядро перестает быть изотермичным, что, в конечном итоге, позволяет "состыковать" его с оболочкой.

Отметим, что у звезд малой массы неустойчивость Шенберга-Чандрасекара не наступает. Это связано с тем, что у этих звезд в центральных областях электронный газ становится вырожденным, т.е. меняется характер зависимости $P = P(\rho, T)$. В задаче IV.2 показано, что вырождение становится существенным при массе гелиевого ядра $M_c < 0.17 M_{\odot}$. Поскольку предел Шенберга-Чандрасекара $M_c/M \sim 0.1$, приходим к выводу, что данная неустойчивость не наступает у звезд с массой менее примерно $1.5 M_{\odot}$. Это значит, что в область красных гигантов эти звезды переходят не в тепловой, а в ядерной шкале времени, поэтому соответствующая область диаграммы Г-Р достаточно плотно заполнена звездами – см. Рис. XII.16, например.

Загорание He в ядре происходит плавно. После этого трек звезды на диаграмме Г-Р уходит влево, а затем описывает одну или несколько петель в зависимости от исходного химсостава звезды – см. Рис. XII.7. По мере выгорания гелия образуется вырожденное углеродно-кислородное ядро.

Свойства звезд горизонтальной ветви и переменных типа RR Lyr см. в обзоре [18].

XII.4 Эволюция звезд с массой $0.5-8 M_{\odot}$ до стадии образования планетарной туманности

Когда в центре звезды гелий полностью выгорит, у звезды возникает углеродно-кислородное ядро. На его внешней границе $r = R_c$ возникает слоевой источник, в котором происходит горение гелия, а еще выше располагается слоевой источник, где происходит превращение водорода в гелий (в CNO-цикле). К этому моменту звезда превращается в красный сверхгигант с радиусом $\sim 100 R_{\odot}$.

Процесс горения гелия в слоевом источнике неустойчив и представляет собой серию вспышек – см. Рис. XII.8, – хотя электронный газ в этой области не вырожден. Причина вспышки в гелиевом слоевом источнике – его малая толщина $\Delta R_{He}/R_c \ll 1$, а также сильная зависимость скорости энерговыделения от температуры в реакции $3\alpha \rightarrow {}^{12}\text{C}$.

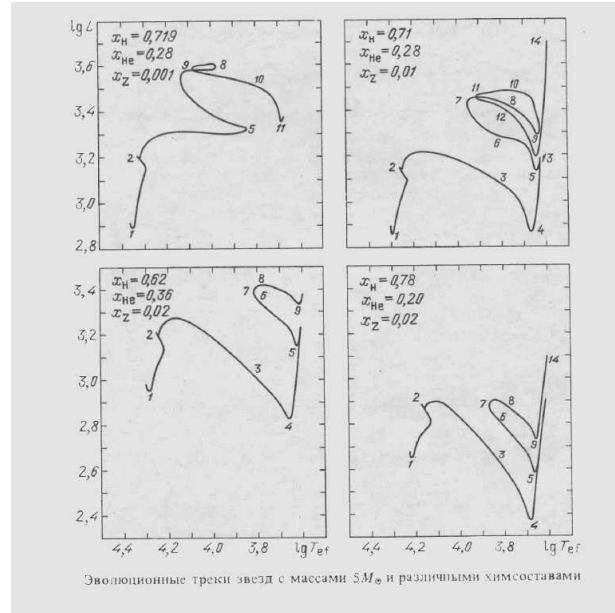


Рис. XII.7: Изменение формы эволюционного трека звезды с $M = 5M_{\odot}$ в зависимости от начального химсостава.

Когда горение гелия у звезды происходит в центральных невырожденных областях, то, как и в случае звезд главной последовательности, случайное повышение температуры в области энерговыделения подавляется. Это происходит потому, что при последующем расширении области, в которой случайным образом повысилась температура, совершается работа против сил тяготения, которая забирает из области больше тепла, чем в нее было внесено изначально – см. раздел XI.2. Но при одинаковом относительном изменении размеров $\Delta r/r$, объем тонкого слоя меняется в меньшей степени, чем центральной области (см. задачу XII.4), поэтому работы против сил тяготения при расширении гелиевого слоевого источника не хватает для охлаждения газа до исходного уровня, что и приводит к развитию тепловой неустойчивости в слое.

Во время каждой вспышки происходит расширение и охлаждение областей, которые находятся над слоевым гелиевым источником. Во-первых, это приводит к тому, что интенсивность горения водорода на время гелиевой вспышки уменьшается, а, во-вторых, в поверхностные слои выносятся продукты горения гелия – см. верхнюю панель Рис. XII.10, на которой показано, как с течением времени в фотосфере звезды меняется относительная концентрация углерода и кислорода (по числу атомов).

Еще более важное следствие вспышечной активности – довольно быстрое уменьшение массы звезды: каждая вспышка порождает ударную волну, которая распространяется наружу и выбрасывает часть оболочки в окружающее пространство. Сказанное иллюстрирует нижняя панель Рис. XII.10, построенная по результатам расчетов [28], из которой видно, что масса звезды, которая на НПП была равной $2M_{\odot}$, через 1.2 млн лет после возникновения кислородно-углеродного ядра уменьшается до $0.6M_{\odot}$. Отметим кстати, что до прихода на асимптотическую ветвь, звезда уже

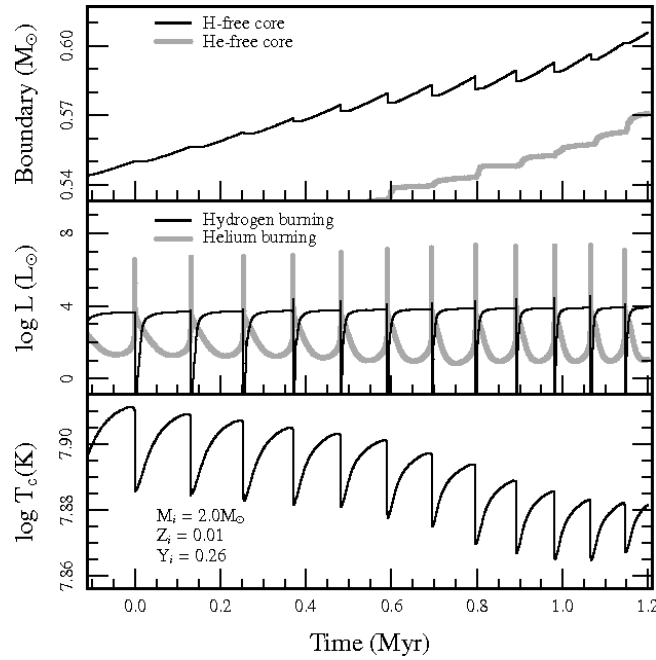


Рис. XII.8: Тепловая неустойчивость в слоевом источнике у звезды, которая на НПП имела массу $2 M_{\odot}$, $X = 0.73$ и $Z = 0.01$. [28]

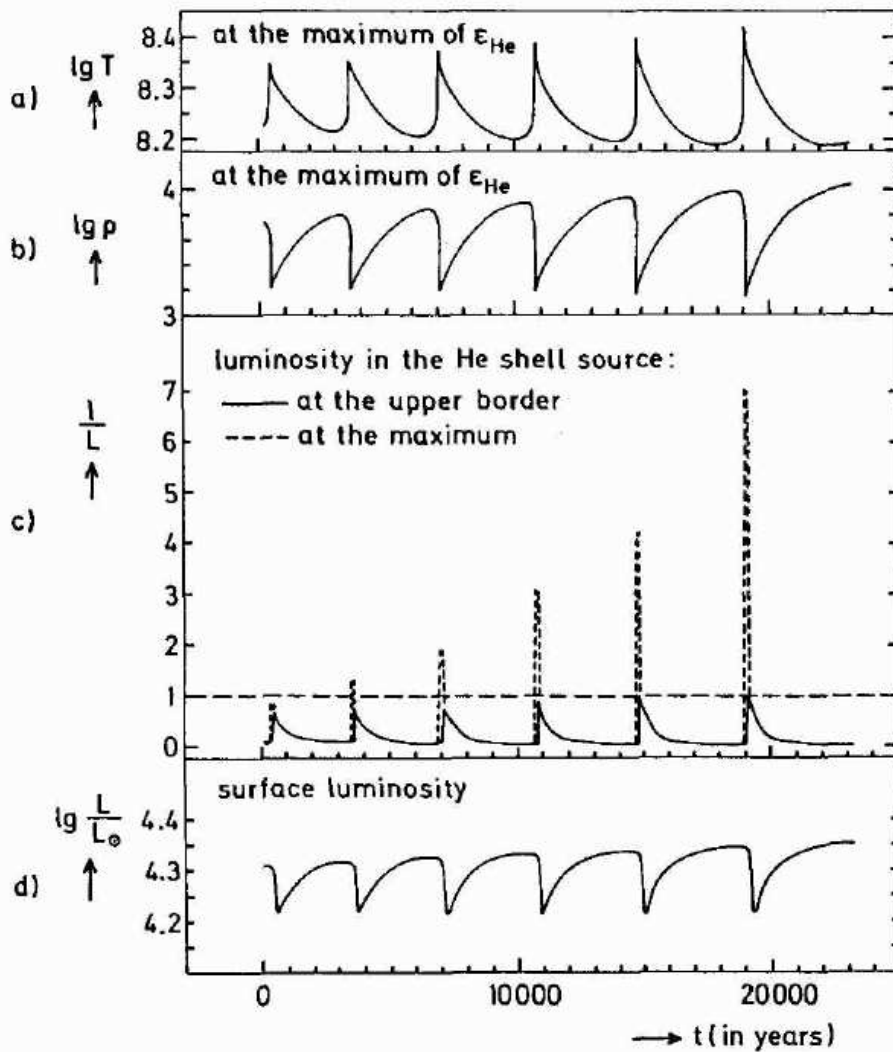
потеряла $\sim 1\%$ массы.

Из-за огромного размера оболочка красного сверхгиганта сравнительно слабо связана с ядром, поэтому такие звезды интенсивно теряют массу и в промежутках между вспышками: их внешние слои сжимаются и расширяются с характерным временем порядка сотни дней, что также порождает ударные волны и истечение вещества в окружающее пространство со скоростью около 10 км/с. Пульсируют эти звезды по той же причине, что и цефеиды – см. раздел XVI.1. Как правило, пульсации красных сверхгигантов происходят не строго периодически, зато их амплитуда очень велика: в течение одного цикла радиус звезды меняется в десятки, а светимость – в тысячи раз.

Переменность блеска красных сверхгигантов была открыта еще в конце XVI в.: обнаружив, что звезда о Кита с периодом около 11 месяцев то появляется на небе, то исчезает, астрономы называли ее "Мирой", т.е. "удивительной". Позже выяснилось, что визуальный блеск Миры Кита меняется от 2^m до 10^m , т.е. в 1600 раз. Сейчас в нашей Галактике известно несколько тысяч подобных звезд, которые называют миридами.

По мере того, как наружные слои оболочки, состоящие в основном из водорода и гелия, улетают в окружающее пространство, атмосфера звезды все больше обогащается продуктами ядерного синтеза. Так образуются одиночные углеродные звезды – сверхгиганты, в спектрах которых наблюдаются интенсивные линии молекул CN, C_2 , SiC_2 и некоторых других, что свидетельствует о высоком содержании углерода во внешних слоях звезды.

Истекающий из атмосфер этих звезд газ постепенно охлаждается. Когда его тем-



Thermal pulses of the helium shell source in a $5M_{\odot}$ star after central helium burning. For the first 6 pulses, some characteristic functions are plotted against time from the onset of the first pulse. T is in K, ρ in g cm^{-3} . (After WEIGERT, 1966)

Рис. XII.9: Изменение параметров гелиевого слоевого источника звезды с $M = 5M_{\odot}$ в течении первых 6 вспышек.

пература опускается ниже 1500 K, атомы углерода начинают конденсироваться в мельчайшие пылинки, активно поглощающие свет. Весьма наглядно этот процесс проявляется у переменных звезд типа R Северной Короны – пульсирующих желтых сверхгигантов. У них, кроме постоянно дующего звездного ветра, время от времени происходят мощные выбросы вещества, приводящие к рождению плотных облаков пыли, которые затмевают звезду. В результате яркость звезды в оптическом диапазоне за несколько дней снижается в тысячи раз – см. Рис. XII.12. По оценке авторов [33], в случае R CrV пыль конденсируется из вещества ветра на расстоянии $\sim 100 R_*$ от звезды со средней скоростью $\sim 3 \cdot 10^{-9} M_{\odot}/\text{год}$. При этом темп потери массы звездой $\sim 2 \cdot 10^{-7} M_{\odot}/\text{год}$, а размер аморфных углеродных пылинок менее 0.01 мкм.

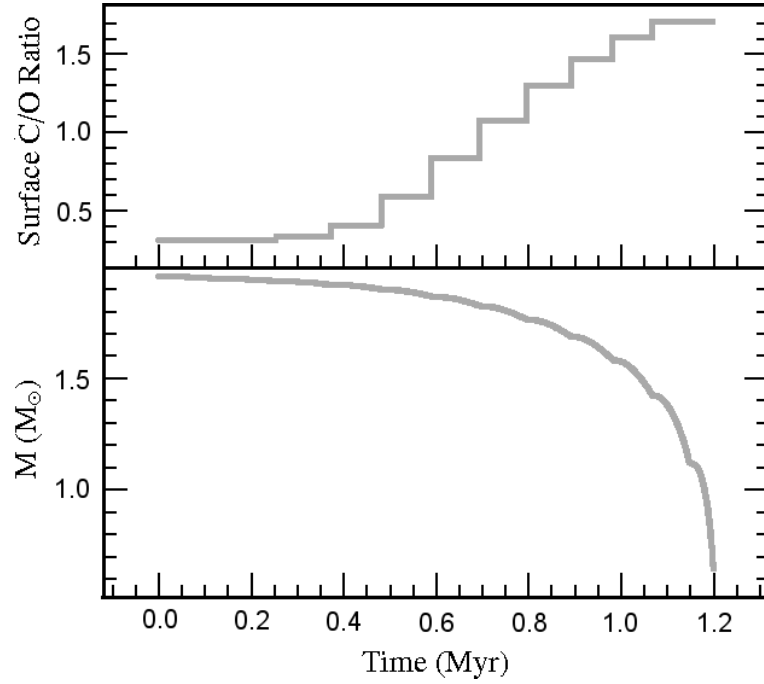


Рис. XII.10: Изменение относительного обилия С и О в фотосфере звезды (верхняя панель) и полной массы (нижняя панель) в процессе эволюции звезды на асимптотической ветви. На НГП звезда имела массу $2 M_{\odot}$, и химсостав $X = 0.73$, $Z = 0.01$. Рисунок взят из [28].

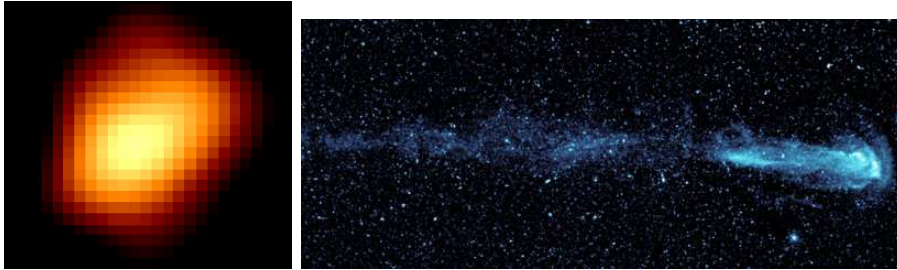


Рис. XII.11: Изображение красного сверхгиганта Миры Киты, полученное в ближнем ИК диапазоне с HST (слева). На изображении, полученном со спутника GALLEX (справа), видна тянущаяся на несколько парсек полоса холодного газа, истекающего из этой звезды.

Наличие вырождения в ядре не позволяет загореться ^{12}C , поэтому в конечном итоге ядро превращается в углеродно-кислородный белый карлик.

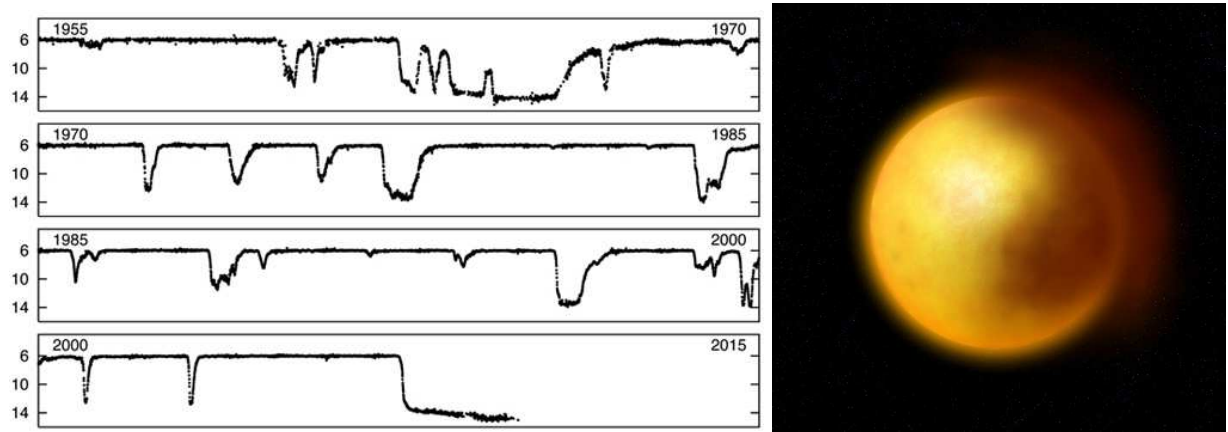


Рис. XII.12: Левая панель – фрагмент исторической кривой блеска звезды R CrB, заимствованный с сайта AAVSO [39]. Справа показано, как, по мнению художника, выглядит облако графитовой пыли, которое время от времени выбрасывает звезда, что приводит к ослаблению ее блеска. Заимствовано с пресс-релиза ESO 0734.

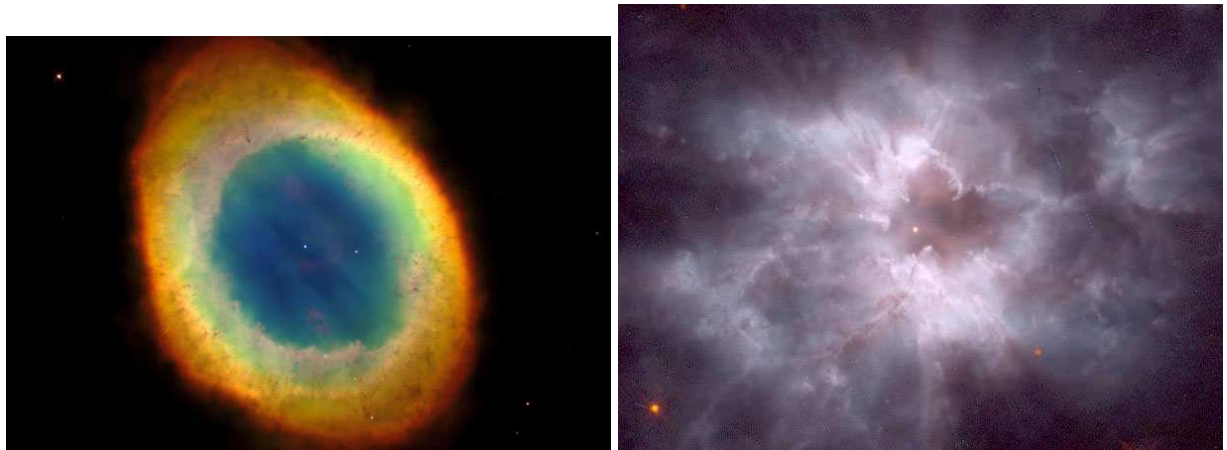


Рис. XII.13: Планетарные туманности M57, NGC 2440 Снимок с HST.

XII.5 Превращение звезды в белый карлик

XII.5.1 FG Стрелы

FG Sge – пример звезды, которая, по-видимому, испытывает одну из последних вспышек в гелиевом слоевом источнике, причем, в буквальном смысле слова, у нас на глазах.

В 1894 г. блеск звезды в полосе В был слабее 13.6^m , а затем начал возрастать и к 1965 г. достиг величины $B = 9.6^m$. Все это время эффективная температура звезды уменьшалась: когда впервые был получен спектр звезды (1955 г.) ее спектральный класс был В4 I, в 1967 г. уже А5 Ia, а к 2010 г. стал ранним G. Все эти годы светимость звезды, по-видимому, почти не менялась: изменение блеска в синих лучах отражает зависимость болометрической поправки от T_{ef} .

В начале 70-х годов у звезды появились долгопериодические изменения блеска

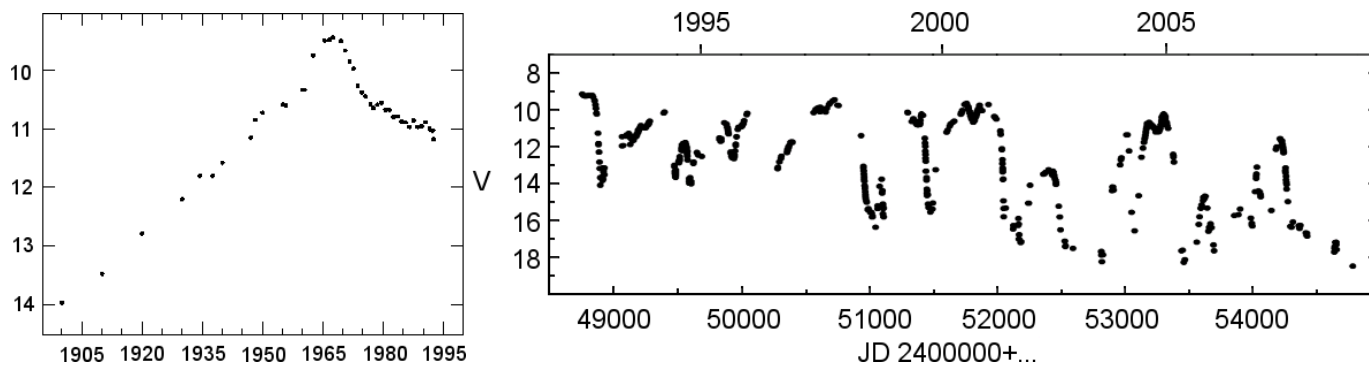


Рис. XII.14: Кривая блеска звезды FG Стрелы. Слева показано, как менялся блеск в полосе фильтра В до середины 90-х годов, а справа – в полосе фильтра V с начала 90-х годов. Заимствовано из ???.

с амплитудой в полосе V около 0.3^m , которые, по-видимому, являются следствием радиальных пульсаций звезды. Период этих пульсаций возрастал от 60 суток в 1969 г. до 115 суток в 1992 г., что указывает на быстрое увеличение радиуса FG Sge.

В 1955 г. открыта планетарная туманность (He1-5), окружающая FG Sge, возраст которой около 5000 лет.

Горизонтальный трек звезды на H-R диаграмме – следствие последней гелиевой вспышки ядерного источника в оболочке (поздний тепловой импульс)

Светимость $\lg L/L_{\odot} = 3.8$, $M \approx 0.61 M_{\odot}$, $D = 2.5 \pm 0.5$ кпк.

С середины 60-х годов в спектре звезды появились линии редкоземельных элементов, и уже к 1980 г. относительное обилие элементов La, Ce, Pr и Nd стало почти в сто раз больше, чем в фотосфере Солнца. Причина – вынос конвекцией во внешние слои звезды элементов s-процесса при $T_{ef} < 8500$ K

С июля 1992 г. блеск звезды в видимой области спектра начал быстро падать и за три месяца упал на 5^m . Одновременное увеличение интенсивности ИК излучения и появление эмиссии в полосах Свана молекулы C_2 показывает, что, как и у звезд типа R CrB ослабление блеска связано с появлением пылевой оболочки.

XII.6 Интерпретация диаграмм цвет-величина рассеянных и шаровых скоплений

1) Время жизни на ГП сильно зависит от M_* , а время ухода в область гигантов $\ll t_{\text{ГП}} \Rightarrow$ форма изохрон почти повторяет форму трека.

2) Населенность некоторого участка изохроны $AB \propto t_{AB} \Rightarrow$ провал Герцшпрунга и провал вблизи точки поворота у рассеянных скоплений. (Наличие неразрешенных двойных ухудшает согласие теории с наблюдениями!)

Сравнение формы изохрон с диаграммой ГР скоплений позволяет найти: 1) возраст скопления; 2) химсостав; 3) расстояние.

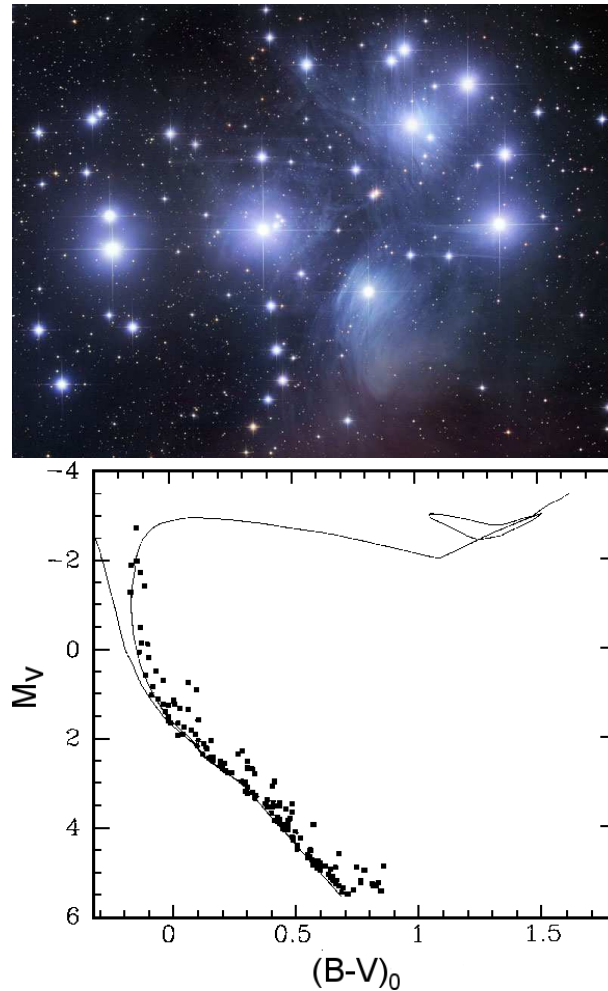


Рис. XII.15: Молодое рассеянное скоплениях Плеяды и его двухцветная диаграмма с $m - M = 5.60$, $E_{B-V} = 0.04$, на которую нанесена начальная главная последовательность и изохрона для $Z = 0.02$, соответствующая возрасту 100 млн. лет - по данным [27].

Параметры нескольких сотен рассеянных скоплений, включая возраст, диаграммы цвет-величина и соответствующие изохроны можно найти на сайтах [37], [38].

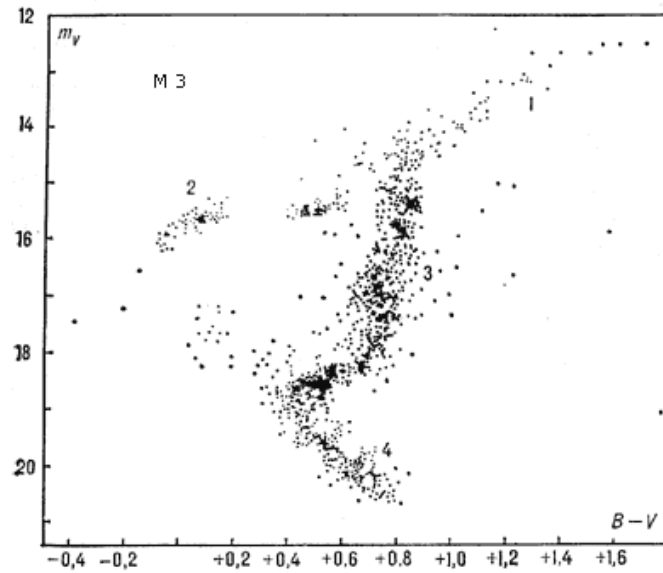


Рис. XII.16: Диаграмма цвет-величина шарового скопления М 3.



Рис. XII.17: Внешний вид шарового скопления NGC 6397. (Пресс релиз ESO от 17.08.2004.)

Задачи

Задача XII.1. Вывести формулу (XII.1), используя соотношения (V.38), (IX.9), (I.24) и полагая, что внутри слоевого источника $\dot{m}(r) = \text{const}$.

Решение Согласно (V.38) и (IX.9) имеем:

$$\left(\frac{\partial X_H}{\partial t}\right)_m = -\frac{m_u}{Q_{CNO}} \varepsilon_{nuc}, \quad \left(\frac{\partial L_r}{\partial m}\right)_t = \varepsilon_{nuc}.$$

Тогда, исключая ε_{nuc} и обозначая $E_H = m_u/Q_{CNO}$ получим:

$$\left(\frac{\partial X_H}{\partial t}\right)_m = -E_H \cdot \left(\frac{\partial L_r}{\partial m}\right)_t.$$

Изменение структуры слоевого источника происходит в ядерной шкале времени, т.е. сравнительно медленно. Это позволяет использовать соотношение (I.24) и написать:

$$\dot{m} \frac{dX_H}{dm} = E_H \frac{dL_r}{dm},$$

где $\dot{m}(r) > 0$ – скорость изменения массы слоевого источника $(\partial m / \partial t)_r$. По условию задачи внутри слоевого источника $\dot{m}(r) = const \equiv \dot{M}_H$, поэтому проинтегрировав полученное выражение получим искомое соотношение (XII.1).

Задача XII.2. Получить соотношение (XII.2), рассмотрев структуру слоевого источника (слоя) и полагая, что:

- 1) масса слоя много меньше M_c ;
- 2) тепло в слое переносится излучением;
- 3) непрозрачность определяется томсоновским рассеянием на электронах;
- 4) водород превращается в гелий в CNO-цикле;
- 5) давлением излучения можно пренебречь.
- 6) эволюция структуры слоя происходит в ядерной шкале времени.

Решение Поскольку изменение структуры слоевого источника происходит в ядерной шкале времени, в уравнениях системы (IX.7) – (IX.9) можно пренебречь членами, которые содержат производные по времени. В соответствии с условием задачи будем считать, что непрозрачность определяется соотношением (VII.8), а выражение для скорости ядерного энерговыделения в CNO-цикле запишем в виде (VI.4):

$$\varepsilon_{nuc} = \varepsilon_0 X_H X_{CNO} \rho T^s.$$

Пусть давление, плотность и температура газа на внешней границе ядра $r = R_c$ (= внутренней границе слоевого источника) соответственно равны P_c , ρ_c и T_c , а светимость и обилие водорода на *внешней* границе слоевого источника равны L_H и X_H^0 соответственно. Заметим, что на внутренней границе слоя $X_H = 0$, а содержание гелия $Y(R_c) = 1 - Z$, где Z – обилие тяжелых элементов, которое не меняется вдоль слоя.

Введем безразмерные переменные z, p, y, t, l, x с помощью равенств:

$$r = z \cdot R_c, \quad P = p \cdot P_c, \quad \rho = y \cdot \rho_c, \quad T = t \cdot T_c, \quad L_r = l \cdot L_H, \quad X_H = x \cdot X_H^0.$$

Если подставить эти соотношения в уравнение состояния (III.34), формулу (XII.1) и дифференциальные уравнения (IX.7) – (IX.9), то получим:

$$p = y t \frac{3 + 5x X_H^0 - Z}{3 - Z}, \quad x = l, \quad p' = -C_1 \cdot B_1 \cdot \frac{y}{z^2},$$

$$t' = -C_2 \cdot B_2 \cdot \frac{yl(1 + X_H^0 x)}{t^3 z^2}, \quad l' = C_3 \cdot B_3 \cdot x z^2 y^2 t^s.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C_1 = \frac{4G}{\Re(3 - Z)} = \text{const}, \quad C_2 = \frac{0.6}{64\pi\sigma} = \text{const}, \quad C_3 = 4\pi\epsilon_0 X_H^0 Z_{CNO} = \text{const},$$

$$B_1 = \frac{M_c}{T_c R_c}, \quad B_2 = \frac{L_H \rho_c}{T_c^4 R_c}, \quad B_3 = \frac{R_c^3 \rho_c^2 T_c^s}{L_H},$$

причем выражение для C_1 получено с учетом того, что $P_c/\rho_c = \Re T_c(3 - Z)/4$.

При $z = 1$ переменные $p = y = t = 1$, а $l = x = 0$. Это значит, что полученная нами система уравнений могла бы иметь "универсальное" решение при наперед заданных значениях Z и X_H^0 , но этому мешает зависимость сомножителей B_i ($i = 1, 2, 3$) от "размерных" значений величин M_c , R_c , ρ_c , T_c и L_H .

Очевидно, что в случае сомножителя B_1 эта зависимость исчезнет, если

$$T_c \propto \frac{M_c}{R_c}.$$

Найдем теперь, как должны быть связаны величины M_c , R_c , ρ_c и L_H , чтобы добиться того же эффекта для множителей B_2 и B_3 . Предположим, что

$$\rho_c \propto M_c^{\varphi_1} R_c^{\varphi_2}, \quad l \propto M_c^{\psi_1} R_c^{\psi_2},$$

где φ_1 , φ_2 , ψ_1 и ψ_2 – некоторые числа, которые нужно найти. Для этого подставим написанные соотношения в B_2 и B_3 , и учитывая, что $T_c \propto M_c/R_c$, потребуем, чтобы эти сомножители не зависели от M_c и R_c . Нетрудно убедиться, что это будет возможно, если

$$\psi_1 = \frac{s+8}{3}, \quad \psi_2 = -\frac{s+3}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{4-s}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{s-6}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача XII.3. Оценить численное значение предела Шёнберга-Чандрасекара, полагая, что:

1) звезда на стадии горения водородного слоевого источника состоит из невырожденного изотермического гелиевого ядра ($X_c = Z_c = 0$, $Y_c = 1$) с массой M_c и радиусом R_c , окруженного водородно-гелиевой оболочкой ($X_e, Y_e \neq 0$, $Z_e = 0$);

2) слоевой источник имеет пренебрежимо малую толщину ($\Delta r = \Delta m = 0$);

3) на границе ядра и оболочки давление и температура меняются непрерывным образом, а изменение молекулярного веса происходит скачкообразно.

Решение В соответствии с условием задачи примем, что

$$\frac{\mu_+}{\mu_-} = \frac{3}{3 + 5X_e} < 1. \quad (\text{XII.4})$$

Это соотношение получено с учетом выражения (III.34) для μ , а индексы $-$ и $+$ относятся к ядру и оболочке соответственно. Скачок молекулярного веса при непрерывности величин P и T означает, что концентрация частиц при переходе через

границу меняется непрерывным образом, а плотность, согласно (III.22), испытывает скачок:

$$\frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{\mu_+}{\mu_-}. \quad (\text{XII.5})$$

В разделе I.2 было показано, что давление P_b в основании оболочки *не меньше* некоторой величины

$$P_b^{min} = \frac{3GM_*^2}{8\pi R_*^4} (1 - q^{2/3}), \quad (\text{XII.6})$$

которая зависит от массы M_* и радиуса R_* звезды, а также от отношения $q \equiv M_c/M_*$ – см. (I.16). Напомним, что знак равенства в (I.16) соответствует случаю, когда плотность в оболочке постоянна, т.е. $\rho(r) = \rho_+ = \text{const}$. Для этого случая можно написать:

$$M - M_c = \frac{4\pi R_*^3}{3} \left[1 - \left(\frac{R_c}{R_*} \right)^3 \right] \rho_+. \quad (\text{XII.7})$$

Предположим, что размер ядра заметно меньше радиуса звезды ($R_c \ll R_*$), поэтому член в квадратных скобках можно положить равным 1. Если выразить из полученного соотношения R_* , заменить ρ_+ на $P_b^{min} \mu_+ / \mathfrak{R} T_c$ и подставить все это в (I.16), то получим следующее равенство:

$$P_b^{min} = \frac{3GM_*^2}{8\pi} (1 - q^{2/3}) \left[\frac{4\pi P_b^{min} \mu_+}{3M_* (1 - q) \mathfrak{R} T_c} \right]^{4/3}.$$

Отсюда следует, что

$$P_b^{min} = \frac{6\mathfrak{R}^4 T_c^4}{\pi G^3 M_*^2 \mu_+^4} \cdot \frac{(1 - q)^4}{(1 - q^{2/3})^3}.$$

В разделе II.4 было показано, что давление на внешней границе изотермического ядра с заданной температурой T_c *ограничено сверху* значением P_s^{max} , задаваемым соотношением (II.46):

$$P_s^{max} = 1.40 \frac{\mathfrak{R}^4 T_c^4}{G^3 \mu_-^4 M_c^2}$$

Но если P_s^{max} – максимально возможное давление на границе ядра, а давление, создаваемое оболочкой, не может быть меньше, чем P_b^{min} , то это значит, что состыковать ядро с оболочкой можно лишь в том случае, если $P_s^{max} \geq P_b^{min}$, т.е. когда

$$1.40 \frac{\mathfrak{R}^4 T_c^4}{G^3 \mu_-^4 M_c^2} \geq \frac{6\mathfrak{R}^4 T_c^4}{\pi G^3 M_*^2 \mu_+^4} \cdot \frac{(1 - q)^4}{(1 - q^{2/3})^3}.$$

Отсюда получаем неравенство:

$$F(q) \equiv q \frac{(1 - q)^2}{(1 - q^{2/3})^{3/2}} \leq \sqrt{\frac{1.4\pi}{6}} \left(\frac{\mu_+}{\mu_-} \right)^2 \approx 0.86 \left(\frac{\mu_+}{\mu_-} \right)^2. \quad (\text{XII.8})$$

Согласно (XII.4), для оболочки с солнечным обилием водорода ($X_e \approx 0.7$) правая часть неравенства ≈ 0.18 , что возможно при $q \leq 0.15$ и $q \geq 0.99$. Ограничение $q \equiv$

$M_c/M_* \leq q_0 \approx 0.15$ означает, что масса изотермического гелиевого ядра, постепенно возрастающая за счет превращения $\text{H} \rightarrow \text{He}$ в слоевом источнике, заведомо не может превысить $\approx 1/7$ массы звезды, поскольку при $q > q_0$ давление на границе ядра станет меньше, чем давление, обусловленное весом вышележащей оболочки.

Сделаем два замечания. Во-первых, второе решение неравенства ($q \geq 0.99$ при $X_e = 0.7$ и $q \geq 0.995$ при $X_e = 1.0$) не представляет для нас интереса, поскольку соответствующие значения q не могут быть достигнуты. Во-вторых, мы получили лишь верхний предел величины q_0 , а не её точное значение. Однако это не существенно, поскольку наша цель – понять результаты численных расчетов с помощью достаточно простой модели.

Задача XII.4. Показать, что в очень тонком слоевом источнике возможно развитие тепловой неустойчивости. Указание: рассмотреть поведение слоя при гомологичном расширении полагая, что при этом не нарушается механическое равновесие.

Решение Пусть R_c и M_c – масса и радиус углеродного ядра, а ΔM и ΔR – масса и протяженность гелиевого слоевого источника, причем $\Delta M/M_c \ll 1$, $\Delta R/R_c \ll 1$. Введем следующие обозначения: $\Delta r \equiv r - R_c$, $\delta r \equiv \Delta r/R_c \ll 1$.

Тогда уравнения, выражающие закон сохранения массы и условие гидростатического равновесия для точек внутри слоя, можно записать в виде:

$$m \approx M_c + 4\pi R_c^2 \rho \Delta r, \quad (\text{XII.9})$$

$$P = \int_{M_c}^M \frac{Gm \, dm}{4\pi r^4} \approx \frac{GM_c}{4\pi R_c^4} \int_{M_c}^{M_c+\Delta M} (1 + \delta r)^{-4} \, dm \approx \frac{GM_c}{4\pi R_c^4} \int_{M_c}^{M_c+\Delta M} (1 - 4\delta r) \, dm. \quad (\text{XII.10})$$

При этом мы учли, что внутри слоевого источника давление быстро уменьшается, и его величина на внешней границе $\ll P_c$.

Предположим, что за время, много меньшее гидродинамического, внутри слоя возникла флуктуация, в результате чего температура в слое немного увеличилась. Поскольку электронный газ далек от вырождения, это приведет к росту давления и последующему расширению слоя. В соответствии с условием задачи примем, что расширение будет гомологичным, причем гидростатическое равновесие в слое при этом сохранится. В задаче I.48 было показано, что в такой ситуации относительная скорость изменения радиуса одинакова для всех слоев. В нашем случае это означает, что

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\Delta \dot{r}}{r} \approx \delta \dot{r} = \text{const}(m).$$

Если теперь продифференцировать соотношения (XII.9) и (XII.10), то, с учетом $\delta \dot{r} = \text{const}$ получим:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\delta \dot{r}}{\delta r}, \quad \frac{\dot{P}}{P} = -4 \delta \dot{r}.$$

Следовательно:

$$\frac{\dot{P}}{P} = 4 \delta r \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (\text{XII.11})$$

Отсюда следует, что при расширении слоя ($\dot{\rho} < 0$) давление внутри него также упадет. Тогда из соотношения (XI.16) при $P_e^{deg} = 0$ вытекает, что

$$\frac{\dot{T}}{T} = (4\delta r - 1) \frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

Если величина δr очень мала, то множитель в скобках будет отрицательным, т.е. расширение очень тонкого слоевого источника будет сопровождаться нагревом его вещества. Таким образом случайное повышение температуры в слое будет нарастать с течением времени, что и означает температурную неустойчивость, которая развивается за время, незначительно превышающее гидродинамическое.

Глава XIII

Белые карлики

XIII.1 Механическое равновесие белых карликов

Белые карлики образуются из ядер звезд, масса которых на $\Gamma\text{П} \leq 8M_\odot$. При рождении белого карлика его $T_{ef} > 10^5$ K, но даже тогда в основной массе звезды электронный газ вырожден: $T \leq T_F$. Идею о том, что равновесие белых карликов (БК) поддерживается давлением вырожденного электронного газа, первым высказал Фаулер (Fowler R.H., MNRAS 87, 114, 1926), а первая количественная теория этих объектов была создана Чандрасекаром (S.Chandrasekhar, 1931).

Рассмотрим газ фермионов с массой покоя m , имея ввиду электроны, или нейтроны: m_e – масса электрона, m_p – нейтрона (примерно равная массе протона). Обозначив $x = p_F/mc$, с учетом $E_F = mc^2(x^2 + 1)^{1/2}$, из (IV.4) получаем, что при $T \ll T_F$:

$$\frac{\rho}{\mu} = \frac{8\pi m^3 c^3 m_p}{3h^3} x^3, \quad P = \frac{8\pi m^4 c^5}{h^3} \left[x\sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) + \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right], \quad (\text{XIII.1})$$

где $\mu \equiv \mu_e = 2/(1 + X)$ для газа электронов и $\mu = 1$ – для газа нейтронов.

В пределе $x \ll 1$ и $x \gg 1$ из (XIII.1) соответственно получаем:

$$P(\rho) = K\rho^{5/3}, \quad K = 1.0 \cdot 10^{13} (m_e/m)\mu^{-5/3} \quad \text{при} \quad \rho \ll 10^6 \mu (m/m_e)^3, \quad (\text{XIII.2})$$

$$P(\rho) = K\rho^{4/3}, \quad K = 1.2 \cdot 10^{15} \mu^{-4/3} \quad \text{при} \quad \rho \gg 10^6 \mu (m/m_e)^3. \quad (\text{XIII.3})$$

Для электронов обе формулы дают одинаковый результат при $\rho \approx 10^6 \mu_e$ г/см³.

Используя (XIII.1) в качестве зависимости $P = P(\rho)$ Чандрасекар численно решил уравнения (I.1) и (I.12) при различных значениях ρ_c . В рамках его теории можно считать, что при $\lg \rho_c < 6$ структура белого карлика описывается политропой с $n=3/2$ и K из (XIII.2), поэтому из соотношений (II.24), (II.25) получаем для маломассивных белых карликов:

$$M = 0.50M_\odot \sqrt{\frac{\rho_c}{10^6}} \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{2}}, \quad R = 1.1 \cdot 10^4 \text{ км} \left(\frac{10^6}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{6}}, \quad R \propto K \cdot M^{-\frac{1}{3}}. \quad (\text{XIII.4})$$

В теории Чандрасекара при $\lg \rho_c \gg 6$ структура белых карликов приближается к структуре политропной звезды с $n=3$ и K из (XIII.3), т.е. при $\rho_c \rightarrow \infty$ радиус

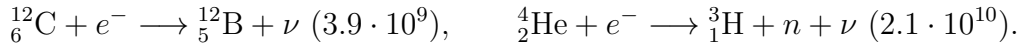
$R \rightarrow 0$, а масса

$$M \rightarrow M_{max} \equiv M_{Ch} \approx \frac{5.75}{\mu_e^2} M_{\odot}, \quad (\text{XIII.5})$$

как это следует из (II.32). Для He, C и O $\mu_e = 2 \rightarrow M_{Ch} = 1.44 M_{\odot}$, а для Fe $\mu_e = 56/26 \rightarrow M_{Ch} = 1.24 M_{\odot}$.

Однако есть два эффекта, из-за которых центральная плотность белого карлика ρ_c не может быть сколь угодно большой – нейтронизация и эффекты общей теории относительности.

1) Процесс нейтронизации ядер приводит к понижению упругости вырожденного газа электронов и его показатель адиабаты γ становится $< 4/3$, в результате чего белый карлик теряет устойчивость. Ниже приведены некоторые важные реакции нейтронизации и указана пороговая плотность ρ_{cr} (г/см³), при которой она начинается:



2) Из (XIII.4) и (XIII.5) следует, что на поверхности белого карлика с $M=0.5M_{\odot}$ вторая космическая скорость $V_{\infty} = (2GM/R)^{1/2} \approx 0.01c$. Поскольку при увеличении массы радиус белого карлика уменьшается, отношение V_{∞}/c растет с ростом ρ_c . Поэтому при расчете структуры самых массивных белых карликов следует учитывать эффекты общей теории относительности (ОТО), о которых более подробно будет сказано в разделе, посвященном нейтронным звездам. Более того, у гелиевых белых карликов потеря устойчивости происходит не столько из-за нейтронизации, сколько из-за эффектов ОТО, поскольку для нейтронизации гелия необходима наибольшая плотность.

Нейтронизация и эффекты ОТО мало меняют максимально возможную массу БК, предсказываемую теорией Чандрасекара: например, для углеродных белых карликов $M_{max} = 1.40 M_{\odot}$ вместо $M_{Ch} = 1.44 M_{\odot}$, а для железных – $M_{max} = 1.12 M_{\odot}$ вместо $M_{Ch} = 1.24 M_{\odot}$. Но в теории Чандрасекара максимальная масса соответствует пределу $\rho_c \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow 0$, тогда как в реальности M_{max} достигается при конечных значениях ρ_c и R : в частности, для углеродных БК $\rho_c^{max} \approx 6.0 \cdot 10^9$ г/см³, $R_{min} = 1500$ км, а для железного – $\rho_c^{max} \approx 1.2 \cdot 10^9$ г/см³, $R_{min} = 2200$ км. При $\rho_c > \rho_c^{max}$ гидростатически равновесные конфигурации, давление в которых определяется вырожденным электронным газом, неустойчивы, и, следовательно, не могут существовать.

Современная теория белых карликов также учитывает неидеальность электронного газа, обусловленную кулоновским взаимодействием электронов с ядрами. Это взаимодействие уменьшает давление P_e при той же плотности, причем для вырожденного электронного газа (в отличие от классического газа) относительная величина поправки к давлению растет с уменьшением плотности. В результате, учет неидеальности е-газа уменьшает значение $M_{БК}^{max}$ всего на несколько процентов, зато кардинально меняет зависимость $M(R)$ в области малых масс (и ρ_c): закон $R \propto M^{-1/3}$ перестает работать, и при $M \sim 0.003 M_{\odot}$ радиус холодной вырожденной конфигурации, состоящей из смеси H и He достигает максимального значения ~ 30.000 км, а

затем уменьшается с уменьшением массы. Эта область масс соответствует планетам-гигантам типа Юпитера, у которого, в частности, $M \approx 0.001 M_\odot$, $R \approx 143.000$ км. Как видно из рисунка для железного БК максимальное значение радиуса достигается при $M \sim 0.1 M_\odot$.

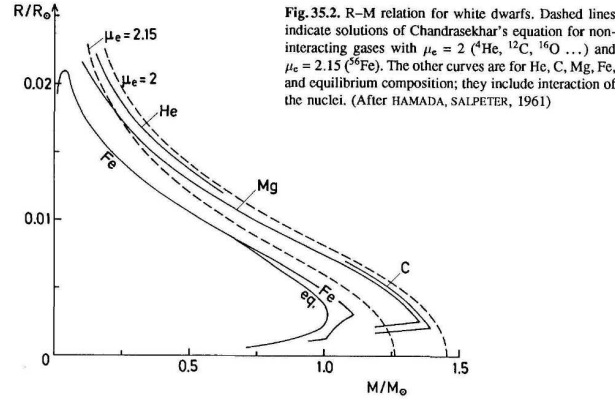


Рис. XIII.1:

XIII.2 Остывание белых карликов

Первая теория остывания белых карликов была создана С.А.Капланом в 1949 г. и независимо Местелом (L.Mestel, 1951). В этих теориях принималось, что белый карлик состоит из вырожденного ядра, в котором сосредоточена практически вся масса, и тонкой лучистой оболочки из невырожденного газа. За границу ядра принималась точка, в которой давление нуклонного $P = \rho \mathfrak{R} T / \mu_i$ и нерелятивистского электронного газа (XIII.2) одинаковы. Поэтому на границе ядра имеем:

$$\rho_c = \left(\frac{\mathfrak{R} T_c}{K_c \mu_i} \right)^{3/2}. \quad (\text{XIII.6})$$

Предположим, что непрозрачность в оболочке белого карлика определяется законом Крамерса (VII.9). В этом случае, согласно (VII.17), в глубине оболочки, т.е. при $T \gg T_{ef}$, $P \gg P_{ph}$, имеем:

$$P = \sqrt{\frac{4C_1 M}{17L}} T^{17/4}, \quad \rho = \frac{\mu_i}{\mathfrak{R}} \sqrt{\frac{4C_1 M}{17L}} T^{13/4}, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{64\pi\sigma G \mathfrak{R}}{3\kappa_0 \mu_i}.$$

Подставляя второе из этих соотношений в (XIII.6) получим:

$$L = C_2 M T_c^{7/2}, \quad \text{где} \quad C_2 = \frac{4K_c^3 \mu_i^5}{17\mathfrak{R}^5} \cdot C_1. \quad (\text{XIII.7})$$

Из-за высокой теплопроводности вырожденного электронного газа можно считать ядро изотермическим, поэтому (XIII.7) связывает светимость белого карлика с его центральной температурой.

Теплоемкость вырожденного электронного газа при $T \ll T_F$ в T_F/T раз меньше, чем теплоемкость газа невырожденных ядер атомов – см. стр.60. Поэтому вся тепловая энергия белого карлика сосредоточена в ядрах. Если они образуют газ, то запас тепла, содержащийся в белом карлике:

$$Q_c = \frac{3\Re T_c M}{2\mu_i}.$$

Решая уравнение

$$dQ_c/dt = -L$$

с учетом (XIII.7) находим, что время остывания ядра БК от температуры T_{c0} до температуры T_c есть:

$$t = \frac{3\Re}{5\mu_i C_2} \cdot \left(\frac{1}{T_c^{5/2}} - \frac{1}{T_{c0}^{5/2}} \right).$$

В пределе $T_c \ll T_{c0}$ получим:

$$T_c \approx \left(\frac{5\mu_i C_2}{3\Re} \right)^{2/5} \cdot t^{-2/5}. \quad (\text{XIII.8})$$

С учетом (XIII.7) отсюда следует:

$$L(t) \propto t^{-7/5} \quad \text{и} \quad T_{ef} \propto t^{-7/20}, \quad (\text{XIII.9})$$

поскольку радиус БК практически не меняется.

Теория Каплана-Местела впоследствии была уточнена с учетом трех обстоятельств:

- 1) Охлаждение ядра нейтринным излучением на ранних этапах остывания
- 2) Возникновение конвекции в оболочке
- 3) Переход ядерной компоненты из газообразного состояния в твердое при понижении температуры до величины $\approx 2 \cdot 10^6 Z^2 (\rho/10^9)^{1/3}$ К, где Z - заряд атомного ядра.

Первые два фактора увеличивают скорость остывания БК, а кристаллизация ядер увеличивает теплоемкость нуклонной компоненты, т.е. запас тепла в белом карлике, тем самым замедляя его остывание. В Таблице приведены некоторые параметры остывающего углеродного БК с $M = 1M_\odot$.

Увеличить время остывания БК могут также пикноядерные реакции (см. раздел V.4), которые могут протекать даже при $T \rightarrow 0$ из-за наличия "нулевых" колебаний решетки с энергией $E_0 = \hbar\omega_0/4\pi$, где $\omega_0 = (4\pi Z^2 e^2 N_i/m_i)^{1/2}$ – плазменная частота ионов кристалла. За $t \sim 10^5$ лет $H \rightarrow {}^4\text{He}$ при $\rho \sim 10^6$ г/см³, ${}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$ при $\rho \sim 10^9$ г/см³ и т.д.

XIII.3 Сверхновые типа Ia

Если на С-О белый карлик с $M < M_{Ch}$ в двойной системе происходит аккреция вещества второй компоненты с темпом аккреции \dot{M}_{ac} , то можно ожидать, что в какой-то момент масса белого карлика дойдет до величины M_{Ch} , что приведет к его гибели

$t, \text{лет}$	T_{ef}, K	L/L_{\odot}	T_c, K
$3 \cdot 10^6$	$5.8 \cdot 10^4$	0.7	$7 \cdot 10^7$
$9 \cdot 10^7$	$3.0 \cdot 10^4$	0.04	$2.5 \cdot 10^7$
$9 \cdot 10^8$	$1.3 \cdot 10^4$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^6$
$8 \cdot 10^9$	$3.9 \cdot 10^3$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^5$

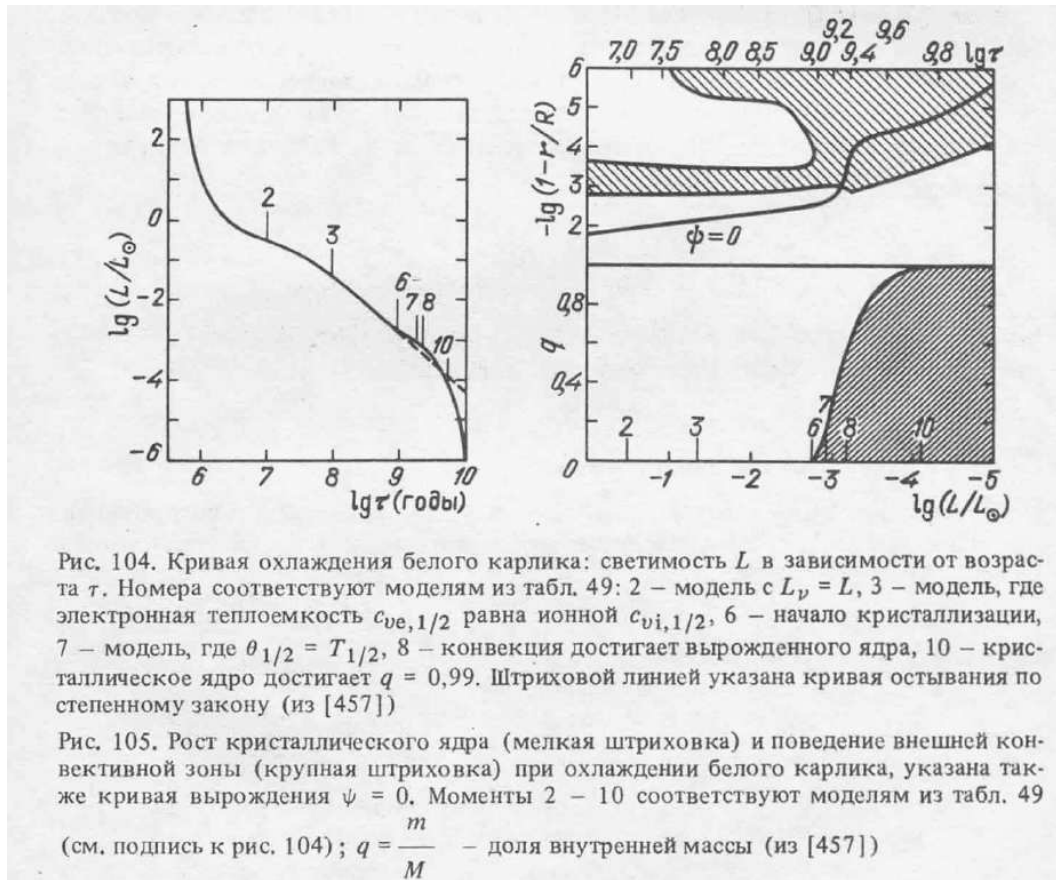


Рис. XIII.2: Заимствовано из [1].

в результате коллапса. Однако реальное развитие событий при этом оказывается гораздо менее тривиальным.

Попадая на белый карлик аккрецируемое вещество формирует оболочку, богатую водородом и гелием. По мере роста массы этой оболочки газ в ее основании уплотняется и нагревается. В какой-то момент температура газа становится настолько высокой, что начинаются термоядерные реакции, в ходе которых водород превращается в гелий. Расчеты показывают, что если темп аккреции $\dot{M}_{ac} < 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$, то к моменту, когда начинается горение водорода электронный газ в основании оболочки, окружающей С-О ядро звезды, оказывается вырожденным. Как и в случае гелиевой вспышки у маломассивных звезд это приводит к тому, что горение водорода происходит в виде термоядерного взрыва. Вследствие этого происходит быстрое увеличение светимости белого карлика, которое сопровождается выбросом, практически, всей

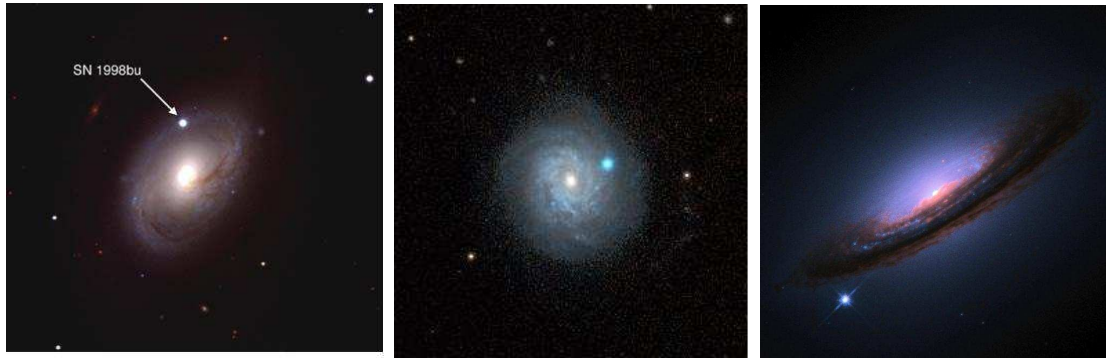


Рис. XIII.3: Вспышки сверхновых типа Ia в различных галактиках. Слева направо: 1998bu, 1998aq, 1994D. Заимствовано с ???

накопленной к этому моменту оболочки в окружающее пространство со скоростью ~ 1000 км/с. После этого аккреция вещества спутника восстанавливается, оболочка над белым карликом начинает формироваться заново, что приводит к новому взрыву и т.д. По-видимому, такой процесс объясняет процесс повторяющихся вспышек новых звезд различных типов и т.н. катаклизмических переменных.

При $\dot{M}_{ac} > 10^{-8} M_{\odot}/\text{год}$, горение водорода происходит в невырожденном газе и в спокойном (стационарном) режиме, так же как и последующее горение гелия, который превращается в углерод и кислород. В результате масса вырожденного C-O ядра M_{CO} увеличивается, неуклонно приближаясь к предельно допустимому значению M_{max} . Этот процесс сопровождается увеличением плотности и температуры в центральной области. Расчеты показывают, что когда масса M_{CO} становится $\approx 0.99 M_{max}$ в центральной области звезды начинается горение углерода. Отметим, что происходит это не столько в результате (сравнительно небольшого) увеличения температуры, сколько из-за повышения плотности: вследствие сильного электронного экранирования горение углерода происходит в т.н. пикноядерном режиме – см. стр.79.

Поскольку углерод, а затем и кислород, загораются в сильно вырожденном газе, их последующее горение происходит в форме взрыва. От центральной области наружу распространяется волна детонации (или дефлаграции), которая поджигает C и O внутри всего белого карлика. Энергии, выделяющейся при их превращении в элементы железного пика, хватает на то, чтобы полностью разрушить белый карлик.

Действительно, энергия связи белого карлика $E_g \approx GM^2/R$, что при $M = 1 M_{\odot}$, $R \approx 10^9$ см составляет $\sim 3 \cdot 10^{50}$ эрг. При превращении ^{12}C в ^{56}Fe выделяется энергия $\sim 5 \cdot 10^{17}$ эрг/г, поэтому детонация $M = 1 M_{\odot}$ углерода приводит к выделению $\sim 10^{51}$ эрг, что достаточно для разрушения белого карлика.

Считается, что этот механизм ответственен, по крайней мере, за 20 % явлений, наблюдаемых как вспышка сверхновых типа Ia, для которых характерны следующие наблюдательные проявления:

- в спектрах нет линий водорода
- сверхновые этого типа связаны со старым населением галактик

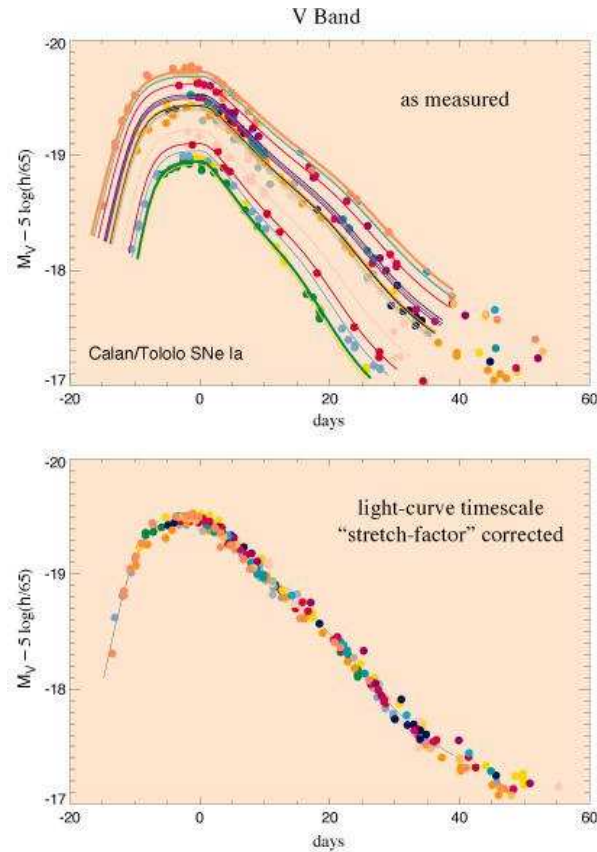
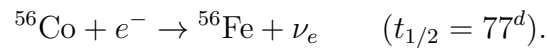
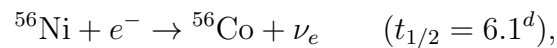


Рис. XIII.4: Кривые блеска сверхновых типа Ia: чем шире кривая блеска, тем ярче сверхновая в максимуме блеска.

- в максимуме блеска светимость близка к 10^{43} эрг/с
- нет компактных остатков после взрыва
- кинетическая энергия разлетающейся оболочки $\sim 10^{51}$ эрг (1 foe).

Свечение оболочек SNI происходит за счет энерговыделения при распадах:



Сверхновые типа SN Ia служат "стандартной свечой".

В заключение еще раз отметим, что по современным представлениям, описанный выше сценарий порождает менее четверти всех наблюдаемых сверхновых типа Ia: в 3-4 раза чаще сверхновые этого типа вспыхивают в результате слияния двух белых карликов.

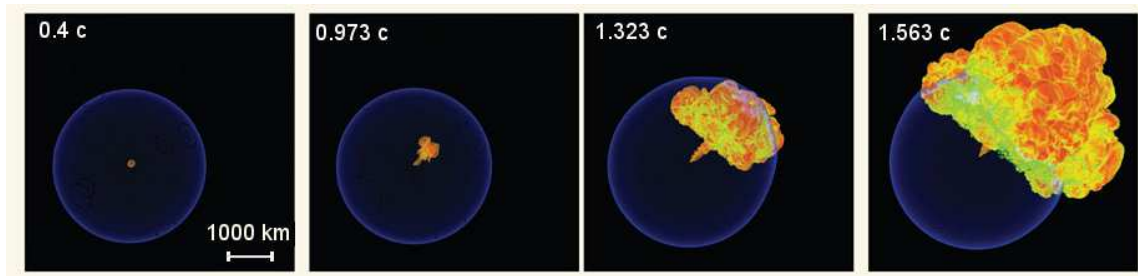


Рис. XIII.5: Асимметричный взрыв в центре белого карлика. В верхнем углу каждой панели указано время, прошедшее с момента начала взрыва, а в правом нижнем углу самой левой панели показан пространственный масштаб. Рисунок из статьи [24].

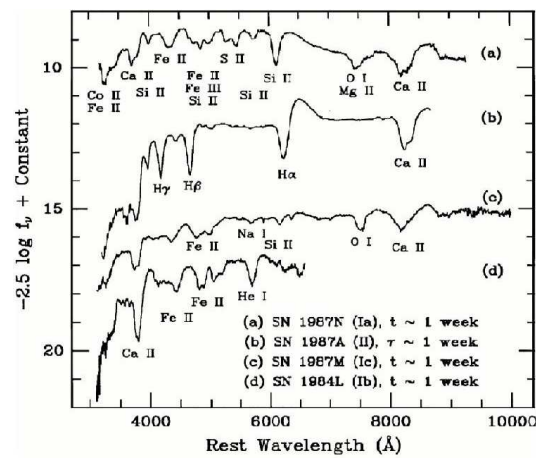


Рис. XIII.6: Спектры сверхновых I и II типа на различных этапах.

Глава XIV

Эволюция звезд с $M > 8M_{\odot}$ после главной последовательности

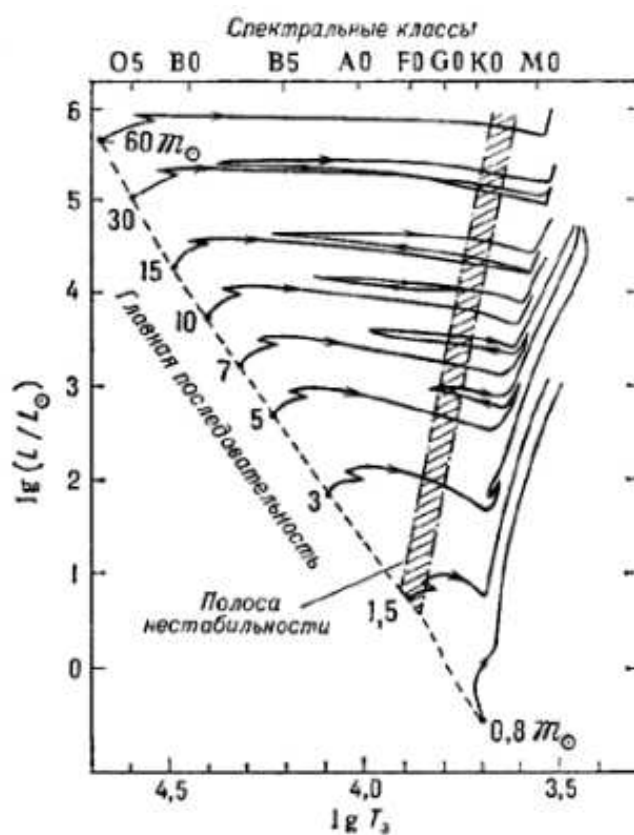


Рис. XIV.1: Эволюционные треки звезд разных масс.

XIV.1 Эволюция звезд с массой до $\simeq 30 M_{\odot}$ и сверхновые II типа

Первая особенность эволюции массивных звезд состоит в том, что благодаря высокой светимости они могут терять заметную долю первоначальной (на НПП) массы уже на стадии ГП. Вообще говоря, нельзя сказать какой процент массы потеряет звезда данной массы, поскольку это зависит от ее исходного химического состава, а также скорости и характера осевого вращения звезды, т.е. от распределения углового момента $j(r)$.



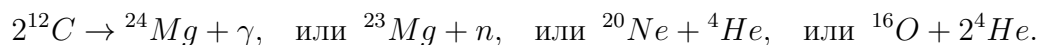
Рис. XIV.2: Изображение окрестностей массивной звезды η Car. Заимствовано из ???

Схема ядерной эволюции звезды:

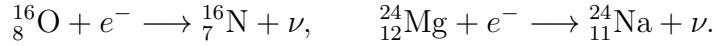
ядерное горение \rightarrow *исчерпывается топливо* \rightarrow *сжатие ядра* \rightarrow *нагрев ядра* \rightarrow *ядерное горение* и т.д.

Поскольку калорийность ядерного горючего падает с ростом заряда ядер-реагентов, а светимость звезды, особенно нейтринная, с течением времени растет, ее эволюция идет все ускоряющимися темпами. Например, у звезды с массой $25 M_{\odot}$ выгорание в центральной области водорода происходит за 7 млн. лет, гелия – за 0.5 млн лет, углерода – за 600 лет, неона – за 1 год, а превращение кремния в элементы железного пика – за 1 день.

У звезд с $8 < M/M_{\odot} < 12$ (в случае умеренной потери массы) эволюция происходит по той же схеме, что и у звезд с $5 < M/M_{\odot} < 8$ вплоть до асимптотической ветви гигантов. Но затем начинается горение углерода в невырожденном ядре, в результате чего образуется *вырожденное* O-Ne-Mg ядро:



Последующее сжатие ядра сопровождается нейтронизацией O и/или Mg:



При нейтронизации показатель адиабаты γ в центральной области становится $< 4/3$, что приводит к потере устойчивости ядра звезды. \Rightarrow коллапс, образование НЗ и вспышка SN Ib/c.

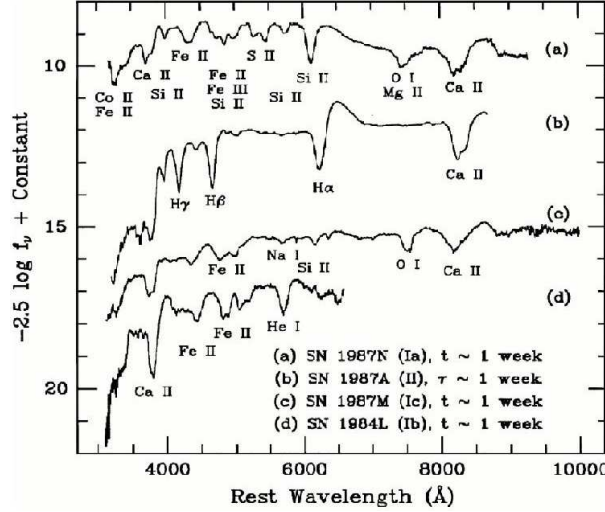


Рис. XIV.3: Спектры сверхновых различных типов [20].

У звезд с $M > 12M_{\odot}$ идет превращение ${}^{16}\text{O}$ в ${}^{30}\text{S}$ и ${}^{32}\text{Si}$, а затем т.н. горение Si:



и т.д. вплоть до ${}^{52}\text{Fe} + {}^4\text{He} \leftrightarrow {}^{56}\text{Ni} + \gamma$.

Затем ядро ${}^{56}_{28}\text{Ni}$ превращается в ядро ${}^{56}_{26}\text{Fe}$:



Когда температура в центральной области достигает значений $\sim 3 \cdot 10^9$ К реакции фотодиссоциации типа ${}^{56}\text{Fe} + \gamma \rightarrow 13{}^4\text{He} + 4n$ и далее ${}^4\text{He} + \gamma \rightarrow 2p + 2n$ ведут к потере устойчивости, коллапсу, образованию НЗ и вспышке SN II. Роль нейтрино.

Непосредственно перед коллапсом структура звезды напоминает луковицу: звезда состоит из множества слоев с различным химсоставом – см. Рис.XIV.4. Горение элементов тяжелее гелия в слоевых источниках происходит в стационарном режиме, поскольку при столь высоких температурах почти всю выделяющуюся энергию уносят нейтрино: случайное повышение температуры увеличивает интенсивность нейтринного излучения в большей степени чем интенсивность ядерного эреговыведения, что возвращает температуру к исходному уровню.

Схема образования SN II: коллапс железного ядра, нагрев, формирование прото-нейтронной звезды, сопровождаемое мощным нейтринным излучением. После этого должен происходить "отскок" оболочки, порождающий ударную волну, которая

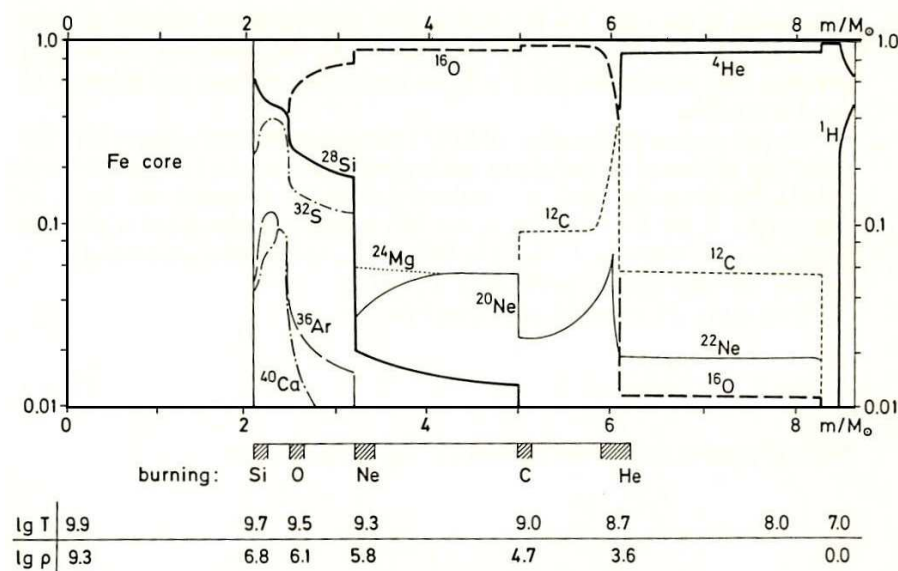


Рис. XIV.4: Структура звезды с массой $25 M_{\odot}$ на поздних стадиях эволюции (предсверхновая II типа).

поджигая ядерное топливо в вышележащих слоях сбрасывает оболочку, состоящую в значительной степени из $^{56}_{28}\text{Ni}$. Скорость разлета оболочки ~ 3000 км/с. Распад никеля – источник свечения сброшенной оболочки.

При сферически симметричном коллапсе не удастся согласовать расчеты с наблюдениями, т.к. значительная часть энергии ударной волны тратится на фотодиссоциацию железа. Альтернативные модели: магниторотационная модель, модель двойного нейтронного ядра.

XIV.1.1 Сверхновая SN 1987a

Звездой-предшественником SN 1987A был голубой сверхгигант Sanduleak -69° 202 с массой около 17 масс Солнца.

До вспышки SN 1987a считалось, что взрыв сверхновой II типа происходит на стадии красного сверхгиганта.

Ожидается, что в момент взрыва звезды с массой заметно меньше SN 1987a представляю собой красные сверхгиганты. Во-всяком случае, было показано, что предсверхновой типа II-P, вспыхнувшей в 2008 г. в галактике NGC 7793, был красный сверхгигант с массой $8-9 M_{\odot}$.

Hot subdwarf stars - Ap Sp Sci 329 October, 2010 Z.Han et al. editors

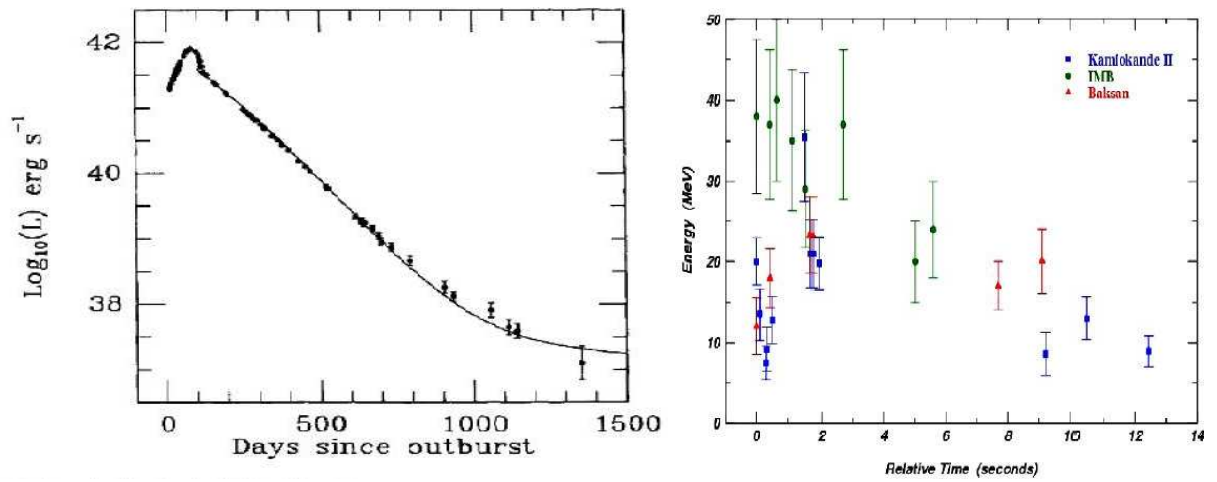


Рис. XIV.5: Оптическая кривая блеска и изменение энергетического спектра нейтрино SN 1987a. Заимствовано из ???

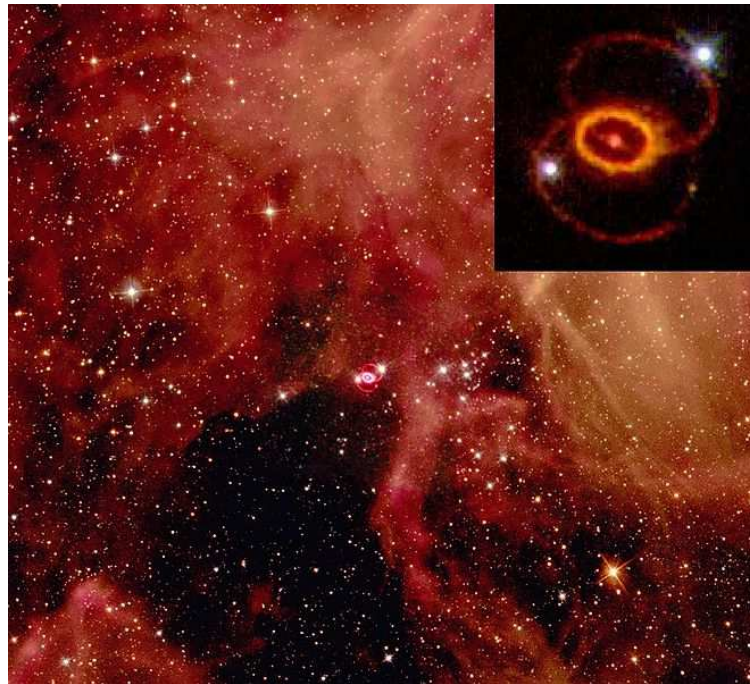


Рис. XIV.6: Изображение области, в которой расположена Сверхновая SN-1987a: туманность Тарантул в Большом Магеллановом облаке. Заимствовано сайта <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Supernova-1987a.jpg>.

XIV.2 Эволюция звезд с массой свыше $\simeq 30 M_{\odot}$.

Эволюция, в целом, протекает так же, как и у менее массивных звезд, но из-за большого вклада излучения в давление неустойчивость Шенберга-Чандрасекара у звезд с массой свыше $30 M_{\odot}$ не наступает. Действительно, в задаче III.12 показано, что из-

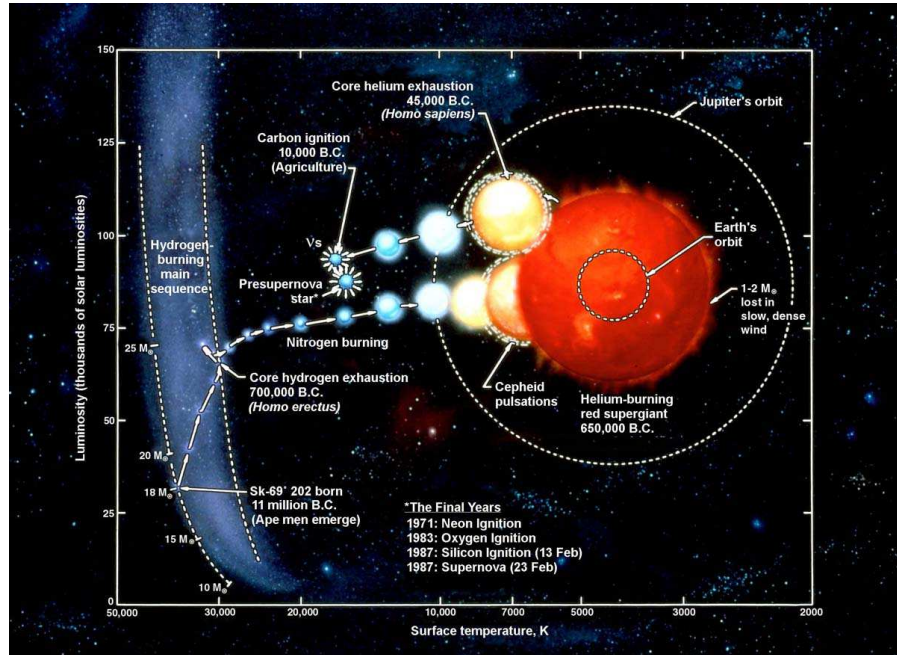


Рис. XIV.7: Наглядная схема эволюционного пути звезды, породившей сверхновую 1987а. Заимствовано из ???

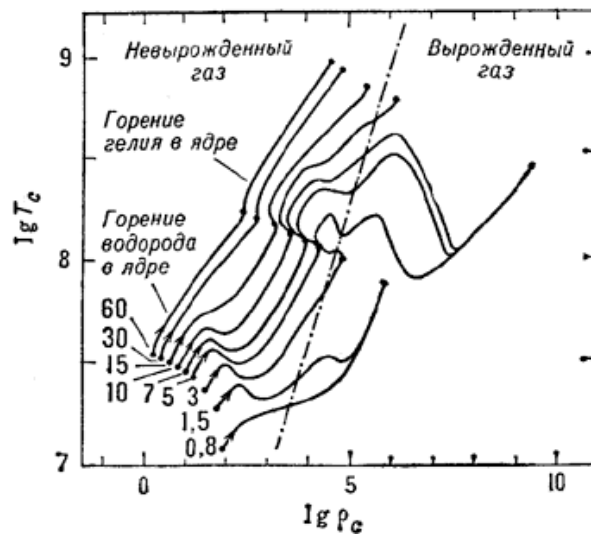


Рис. XIV.8: Изменение параметров в центре звезд разной массы, полученное из численных расчетов.

за давления излучения неустойчивость возможна при массе изотермического ядра $M_c \lesssim 2.7 M_{\odot}$. Поскольку предел Шенберга-Чандрасекара $M_c/M \simeq 0.1$, получаем, что соответствующая неустойчивость возможна лишь для звезд с массой $\lesssim 30 M_{\odot}$.

Эволюционные треки этих звезд на диаграмме Г-Р почти горизонтальны, поскольку

ку $L \simeq L_{Ed}$.

Потеря массы массивными звездами приводит к изменению формы трека. На ГП звезды с $M < 50M_{\odot}$ теряют до 20% массы, а более массивные - до 90% \Rightarrow формирование звезд Вольфа-Райе (WR). Механизм потери - давление излучения в линиях и на пыли (при низких T_{ef}) + пульсационная неустойчивость.

Farell S.A., Webb N.A., Barret D. et al., *An intermediate-mass black hole of over 500 M_{\odot} in the galaxy ESO 243-49*, Nature 460, 73, 2009.

Suwa Y., Kotake K., Takiwaki T. et al., *Explosion geometry of a rotating 13 M_{\odot} star driven by the SASI-aided neutrino-heating mechanism*, Publ. Astron. Soc. Japan 62, L49 (2010)

У звезд с $M > 30 - 50 M_{\odot}$ температура в центре настолько высока, что потеря устойчивости происходит из-за рождения пар - см. Рис.XII.2. Коллапс ядра приводит к термоядерному взрыву кислорода. Результат коллапса - полный разлет или образование ЧД.

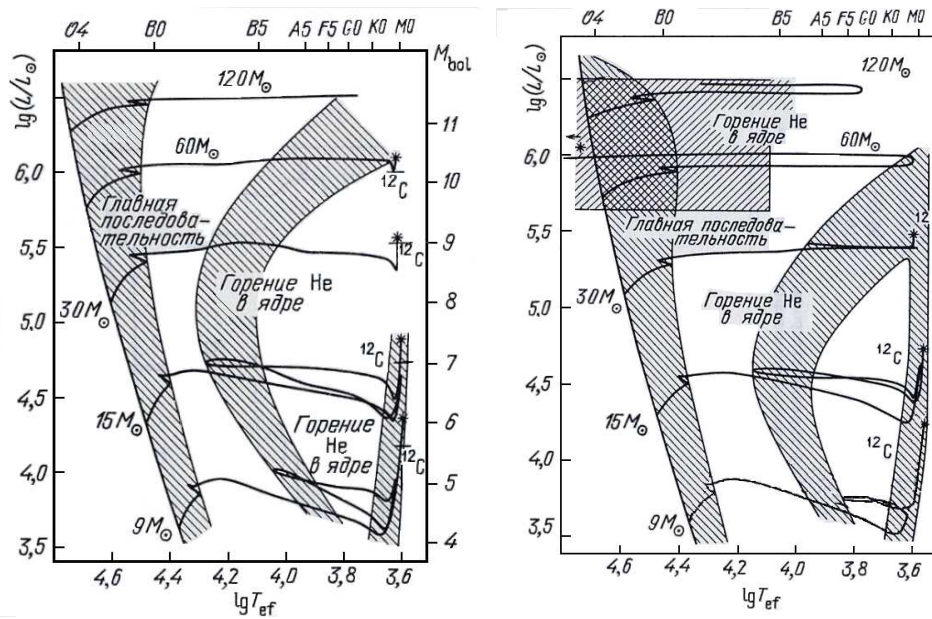


Рис. XIV.9: Эволюционные треки массивных звезд, рассчитанные без учета потери массы (слева) и в предположении, что $\dot{M}_w \simeq 70 L/c^2$ (справа). Горизонтальной чертой отмечено место загорания углерода в ядре, а звездочкой - место, где звезда теряет устойчивость (предсверхновая). По данным А.Маедер, A&A 99, 97, 1981

Источники гамма-всплесков - погибающие звезды с массой $\sim 50 - 100 M_{\odot}$. Коллапс вращающейся звезды, формирование аккреционного диска, релятивистский джет. Собственное и послесвечение (prompt & afterglow).



Рис. XIV.10: Гигантский пузырь, который ветер звезды типа Вольфа-Райе выдул в окружающем звезду газе. Заимствовано с сайта ?????

XIV.3 Синтез химических элементов

Польский астроном Прежибильский обнаружил звезду, в спектре которой доминируют линии редкоземельных элементов – см. Рис. XIV.17.

В 1999 г. был запущен космический аппарат STARDUST, который после пролета вблизи кометы Wild II вернулся на Землю. На аппарате была установлена специальная ловушка, в которую попали пылинки, находившиеся в коме кометы – см. Рис. XIV.18.

Устойчивых ядер с $A = 5$ и $A = 8$ не существует. \implies Мы - звездные люди!

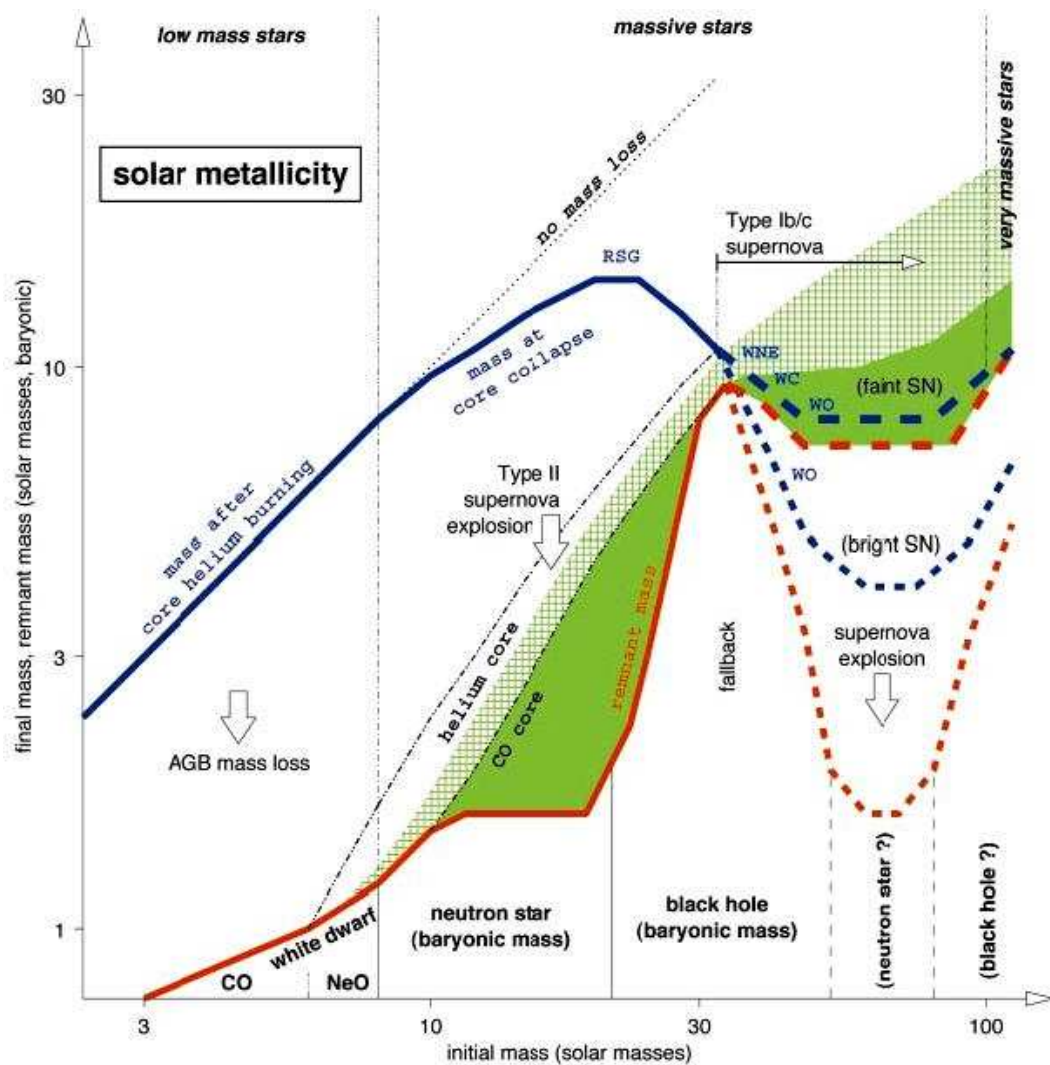


Рис. XIV.11: Конечная судьба звезд в зависимости от их исходной массы. Заимствовано с сайта ?????

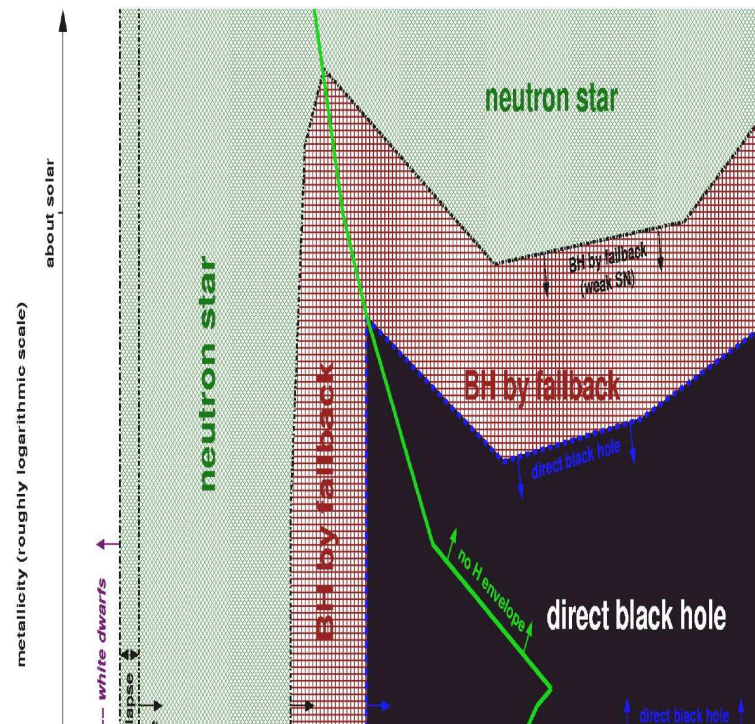


Рис. XIV.12: Конечная судьба звезд разных масс в зависимости от их химсостава на НГП. Заимствовано с сайта ?????

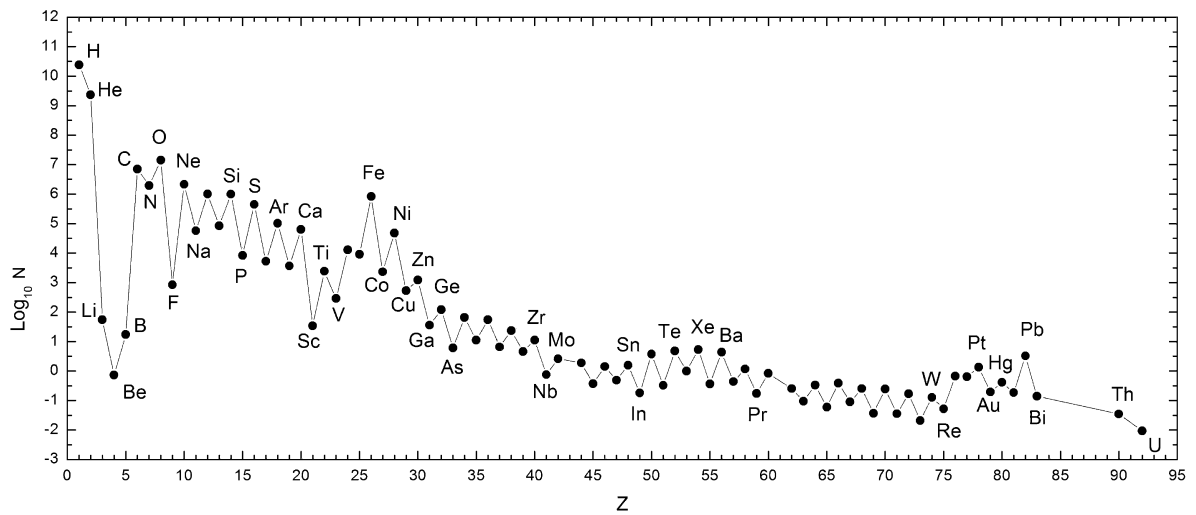


Рис. XIV.13: Относительное обилие (по числу атомов) химических элементов в Солнечной системе. Содержание кремния принято равным 10^6 . Заимствовано с сайта [36]

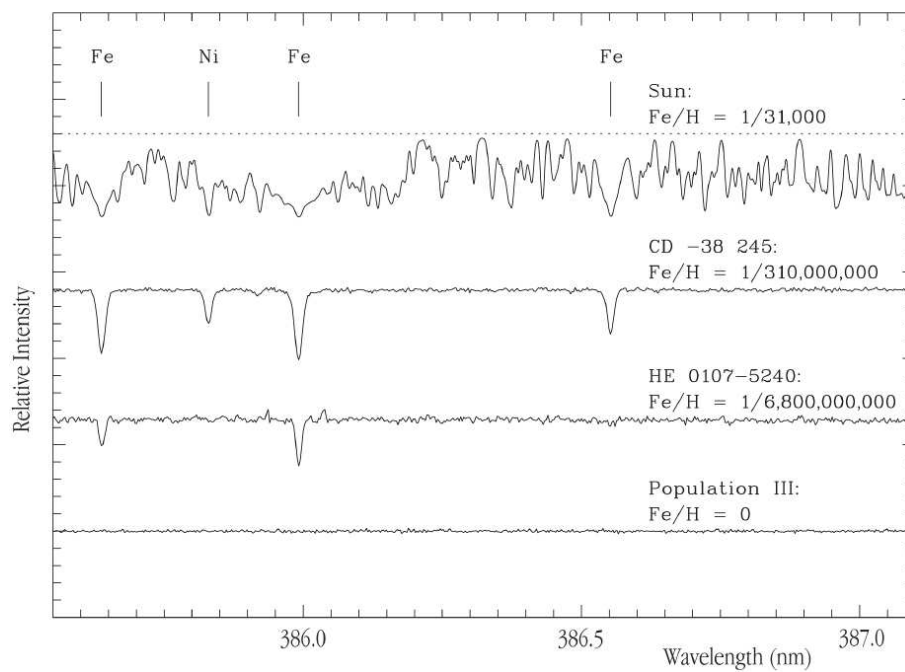


Рис. XIV.14: Спектры звезд с разным содержанием тяжелых элементов и ожидаемый спектр звезд Населения III. Заимствовано из пресс-релиза ESO 0228 от 30.10.2002.

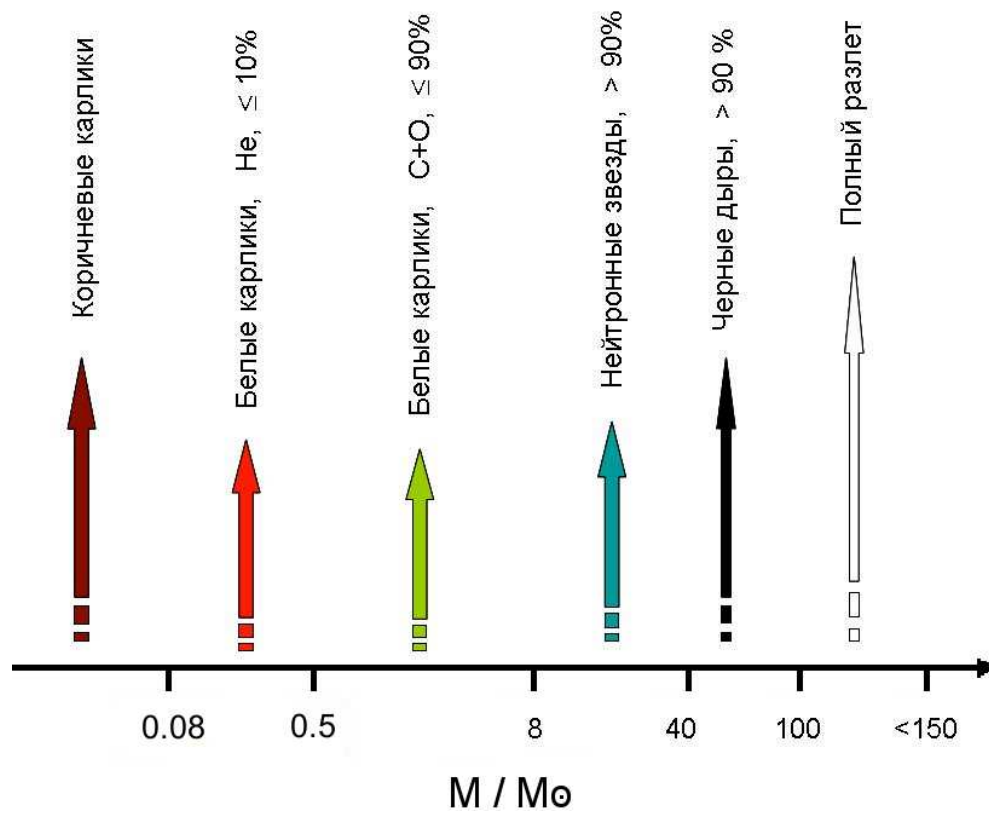


Рис. XIV.15: Конечная судьба звезд и процент выбрасываемой в окружающее пространство массы в зависимости от начальной массы на НГП.

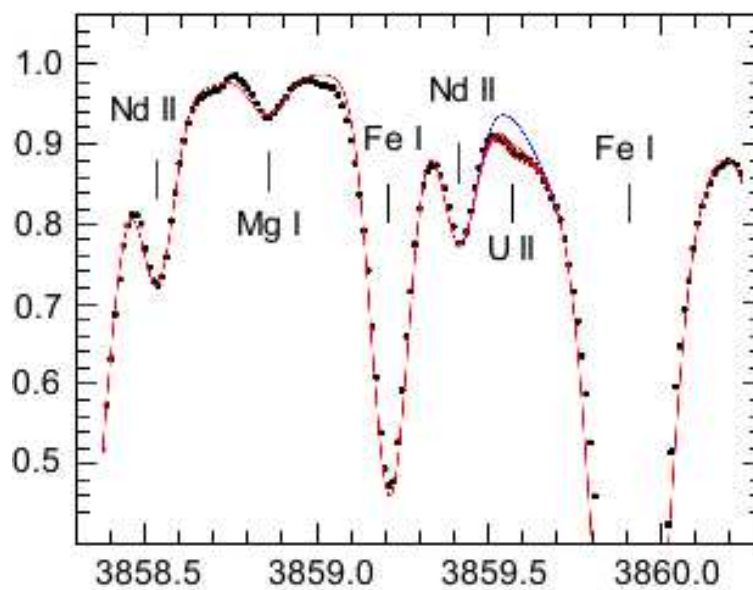


Рис. XIV.16: Участок спектра звезды He 1523-0901, содержащий линию однократно ионизованного урана. Точки – наблюдения, красная кривая – расчетный спектр, синяя линия – расчетный спектр без учета вклада урана. По оси абсцисс отложена длина волны в Å, а по оси ординат – поток, нормированный на уровень континуума. Пресс-релиз ESO ???

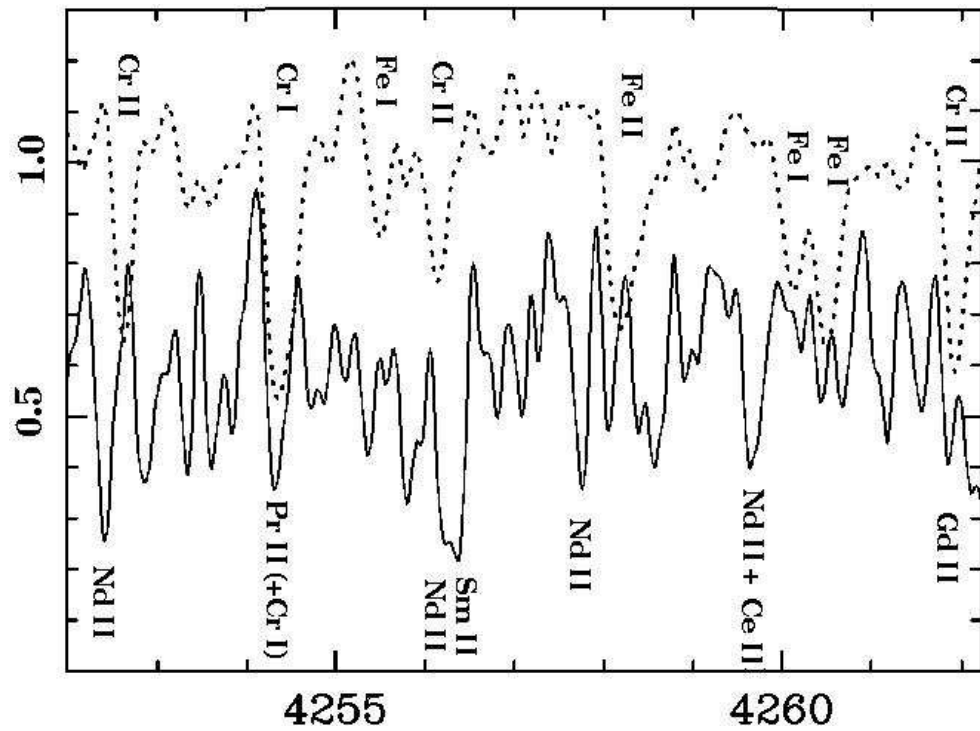


Рис. XIV.17: Участок спектра звезды Пржебильского (сплошная линия), содержащий множество линий элементов редкоземельной группы. Для сравнения пунктирной линией показан спектр звезды β CrB. По оси абсцисс отложена длина волны в \AA , а по оси ординат – поток, нормированный на уровень континуума. Взято из ???

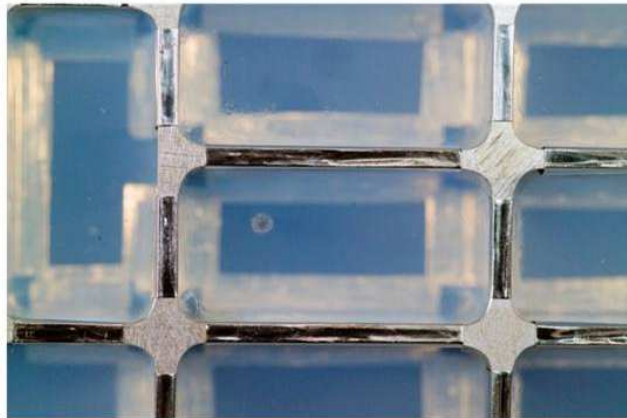


Рис. XIV.18: Внешний вид космического аппарата STARDUST (слева) и фото участка ловушки с застрявшей в ней пылинкой из комы кометы Wild II. Взято с сайта ???

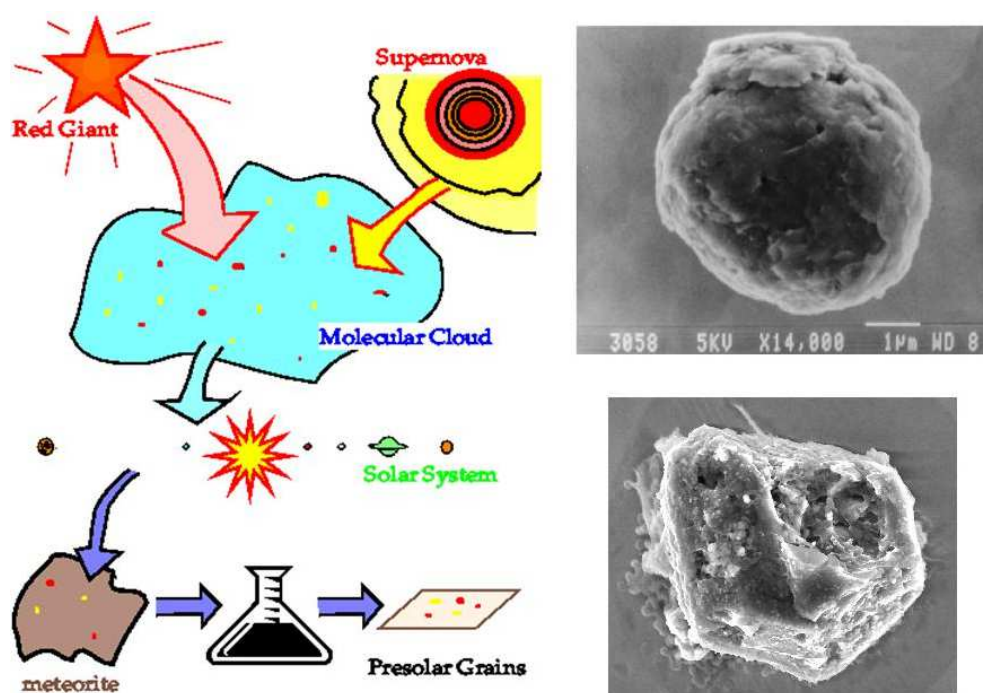


Рис. XIV.19: Слева показана схема, иллюстрирующая откуда берутся межзвездные пылинки и как их обнаруживают. Внешний вид межзвездных пылинок, выделенных из метеоритов. Взято из ???

Глава XV

Нейтронные звезды

XV.1 Механическое равновесие нейтронных звезд

Предположим, что уравнение состояния вещества НЗ описывается соотношением (XIII.1) для газа вырожденных нейтронов, а теория тяготения – ньютоновская. Тогда, как и в случае белых карликов, получим, что при "малых" плотностях (нерелятивистское вырождение)

$$M_{NS} \propto \rho_c^{1/2}, \quad R_{NS} \propto \rho_c^{-1/6},$$

а максимальная масса нейтронной звезды определяется переходом нейтронов в ультрарелятивистский предел и равна

$$M_{NS}^{max} \simeq 5.75 M_{\odot},$$

т.е. M_{Ch} при подстановке $\mu = 1$ в (XIII.5). Однако, в отличие от белых карликов, такое приближение плохо описывает нейтронные звезды по следующим причинам.

Из последнего соотношения в (XIII.4) и выражения для K (XIII.2) следует, что при одинаковой массе и $\mu_e = 2$

$$R_{NS} = R_{WD} \cdot (m_e/m_n) \mu_e^{5/3} \simeq R_{WD}/600.$$

Следовательно, уже при $M = 0.5 M_{\odot}$ радиус нейтронной звезды ~ 20 км, а $V_{\infty} \sim 0.3 c$, поэтому ее строение нельзя рассматривать в рамках теории тяготения Ньютона. Именно эффекты ОТО ограничивают максимально возможную массу НЗ, причем происходит это при $\lg \rho_c \leq 15.5$, т.е. еще до того, как нейтроны станут релятивистскими: для нейтронов формулы (XIII.2) и (XIII.3) дают одинаковый результат при $\lg \rho \simeq 16$.

Из формул (II.24), (II.25) и (XIII.2) вытекает, что при одинаковой массе

$$\rho_0^{NS} = \rho_0^{WD} \cdot (m_n/m_e)^3 / \mu_e^5.$$

Для $M=0.5 M_{\odot}$ и $\mu_e = 2$ это дает $\rho_0^{NS} \sim 2 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$, что сравнимо с ядерной плотностью $\rho_{nuc} \simeq 5 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$, которая получается делением массы нейтрона на объем, соответствующий радиусу действия ядерных сил $r_n \sim 10^{-13} \text{ см}$. Отсюда следует,

что нейтронный газ нельзя рассматривать как идеальный газ невзаимодействующих частиц.

По мере увеличения плотности при коллапсе железного ядра звезды происходит нейтронизация вещества, т.е. образование ядер с все увеличивающимся числом нейтронов. В обычных условиях такие ядра не стабильны, но при высокой плотности вырождение электронного газа подавляет их распад.

По мере приближения плотности к величине $\rho_d \simeq 4 \cdot 10^{11} \text{ г/см}^3$ энергетически выгодным становится появление свободных нейтронов, газ которых сильно вырожден. При $\rho \geq \rho_d$ свободных нейтронов становится настолько много, что их давление превосходит P_e . Вплоть до $\rho \simeq \rho_{nuc}$ вещество представляет собой смесь переобогащенных нейтронами ядер, образующих кристаллическую решетку, свободных нерелятивистских нейтронов и релятивистских электронов.

При $\rho > \rho_{nuc}$ свойства вещества известны плохо: в этом диапазоне уравнение состояния зависит от ядерных сил, причем нужно учитывать многочастичное взаимодействие. Открыт вопрос о возможности перехода нейтронов и протонов в сверхтекучее состояние, возможности образования нейтронного кристалла, фазового перехода в состояние кварковой материи и т.д. От этих эффектов зависит скорость остывания НЗ и форма зависимости $R(M)$ вблизи $M_{NS} = M_{max}$.

XV.1.1 Эффекты ОТО

Обозначим

$$\rho = \rho_b(1 + E/c^2), \quad r_g = 2Gm_r/c^2,$$

где ρ_b – плотность барионов.

Тогда (уравнения Толмена-Оппенгеймера-Волкова):

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G(\rho + P/c^2)(m_r + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2(1 - r_g/r)}$$

$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dm_r^b}{dr} = \frac{4\pi r^2 \rho_b}{(1 - r_g/r)^{1/2}},$$

где m_r и m_r^b – т.н. гравитационная и барионная массы.

Максимальная масса нейтронных звезд определяется как уравнением состояния, так и эффектами ОТО:

- 1) Энергия и давление "весят";
- 2) $r \rightarrow r_g$, т.к. с ростом M падает R .

По оценкам разных авторов $M_{NS}^{max} = 1.5 \div 2.6 M_\odot$. Этому соответствует $R \simeq 10$ км.

Определение максимально возможной массы нейтронных звезд позволяет получить информацию о характере ядерного взаимодействия при экстремально высокой плотности. Сейчас известно, что существуют НЗ с массой до $2 M_\odot$: в 2010 г. было найдено, что масса нейтронной звезды (пульсара) PSR J1614-2230, входящего в

состав двойной системы, $1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$ (Demorest P.B., Pennucci T., Ransom, S.M., Roberts M.S.E., Hessels, J. W. T., Nature 467, 1081, 2010).

НЗ также не могут иметь массу меньше $M_{min} \simeq 0.1 M_{\odot}$, поскольку при $\lg \rho_c \leq 14.2$ нейтроны начнут распадаться. Звезде с M_{min} соответствует $R \simeq 150$ км.

XV.2 Остывание нейтронных звезд

Остывание НЗ. вплоть до $T_c \sim 4 \cdot 10^8$ К определяется нейтринными потерями, а далее за счет излучения электромагнитных волн с поверхности, как и в случае белых карликов.

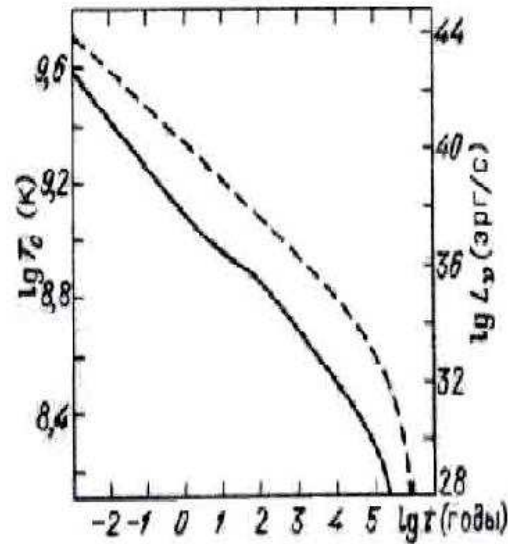
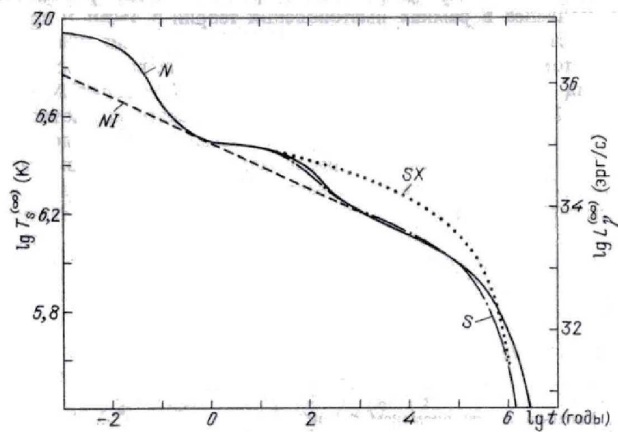


Рис. XV.1: Изменение центральной температуры (сплошная кривая) и нейтринной светимости (штриховая кривая) остывающей нейтронной звезды.



Уменьшение со временем t поверхностной температуры нейтронной звезды с массой покоя $M_0 = 1.4M_\odot$ для бесконечно удаленного наблюдателя $T_s^{(\infty)}$ и фотонной светимости $L_\gamma^{(\infty)}$ в отсутствие сверхтекучести (N) и двух вариантах учета сверхтекучести (S) и (SX). Штриховой линией дана кривая охлаждения в отсутствие сверхтекучести в приближении изотермического ядра (NI). Магнитное поле предполагалось отсутствующим

Рис. XV.2:

Глава XVI

Пульсации звезд. Астросейсмология.

XVI.1 Радиальные адиабатические пульсации звезд.

Равновесие звезды обеспечивается балансом противоположно направленных сил: тяготения и газового давления. В разделе I.7 на примере гомологических возмущений мы видели, что если среднее по звезде значение показателя адиабаты $\gamma > 4/3$, это равновесие устойчиво, поэтому небольшое избыточное сжатие (или расширение) звезды приведет к тому, что давление газа станет больше (или соответственно меньше) силы тяготения, и вещество начнет двигаться в противоположную сторону, возвращая звезду к равновесному состоянию. По мере приближения к положению равновесия вещество разгоняется и по инерции переходит через точку равновесия. После этого направление силы, возвращающей газ к исходному положению, меняется на противоположное, и она тормозит газ до полной остановки, а затем начинает возвращать его к положению равновесия. Затем все должно повториться сначала, т.е. звезда будет испытывать радиальные колебания (пульсации) вокруг положения равновесия.

Однако еще в 1920-е годы Эддингтон показал, что вязкость газа должна быстро гасить случайно возникшие в звезде пульсации, не позволяя им достигнуть заметной амплитуды. С другой стороны, к тому моменту уже было надежно установлено, что у ряда звезд такие пульсации происходят, поэтому Эддингтон попытался найти механизм, который бы поддерживал пульсации. Им было выдвинуто две гипотезы. В рамках первой гипотезы предполагалось, что потери энергии на трение может компенсировать избыточное выделение ядерной энергии во время сжатия звезды, что казалось разумным, поскольку скорость ядерного энерговыделения ϵ увеличивается с ростом ρ и T . Но колебания звезды напоминают колебания струны, у которой один конец закреплен (центр звезды), а второй (поверхность звезды) – свободный. Это значит, что при пульсации звезды амплитуда колебаний в центральной области мала, и последующие расчеты показали, что ϵ -механизм, как его теперь называют, может работать, только в звездах с $M > 60 M_{\odot}$.

Вторая идея Эддингтона основывалась на предположении о том, что при сжатии звезды непрозрачность ее вещества возрастает, запирая выходящее наружу излучение, что способствует накоплению энергии, которая на стадии расширения передается газу, компенсируя потери на трение. Однако все оказалось не так просто. Дело в том, что в основной массе звезды газ почти полностью ионизован, и его непрозрач-

ность описывается законом Крамерса $\kappa_K \propto \rho T^{-7/2}$. Чтобы звезда начала пульсировать, ее колебания изначально должны быть малы, а затем уже вырасти до заметной амплитуды. На стр. 18 мы отмечали, что малые колебания происходят, практически, адиабатически, поэтому в процессе колебаний в невырожденном газе T оказывается $\propto \rho^{\gamma-1}$, а

$$\kappa_K \propto \rho^{(9-7\gamma)/2}. \quad (\text{XVI.1})$$

В случае ионизованного больцмановского газа $\gamma = 5/3$, поэтому $\kappa_K \propto \rho^{-4/3}$, т.е. при сжатии непрозрачность вещества становится меньше, а не больше, как предполагал Эддингтон.

В этой связи российский физик С.А.Жевакин (1916-2001) обратил внимание на области звезд, в которых водород и гелий, т.е. наиболее распространенные элементы, ионизованы не полностью. В этих областях показатель адиабаты γ меньше $5/3$ (см. раздел III.3.1) и другая зависимость непрозрачности от ρ и T , что может сделать правильной гипотезу Эддингтона. Расчеты Жевакина показали, что в случае цефеид областью, которая играет роль своеобразного клапана, регулирующего поступление лучистой энергии во внешние слои, является зона, где происходит вторая ионизация гелия. Сейчас этот механизм раскачки колебаний называют клапанным, или κ -механизмом.

Чтобы раскачать колебания звезды, оболочка над зоной ионизации должна быть достаточно массивной, поэтому у очень горячих звезд колебания возбуждаться не могут: их зоны частичной ионизации слишком близки к поверхности. В звездах с очень низкой эффективной температурой клапанный механизм также оказывается не эффективным, поскольку во внешних слоях этих звезд значительная доля тепла переносится конвекцией. Поэтому пульсирующие звезды на ГР-диаграмме располагаются в области, которая имеет вид сравнительно узкой полосы, называемой полосой неустойчивости – см. Рис. XVI.1. Именно в этой полосе наблюдаются радиально пульсирующие цефеиды (переменные звезды типа δ Цефея и W Девы) и звезды типа RR Лиры. В центральных областях этих звезд происходит горение гелия. На этой эволюционной стадии треки звезд имеют петлеобразную форму и могут несколько раз пересекать полосу неустойчивости, поэтому радиальные пульсации возникают в одной и той же звезде несколько раз и каждый раз поддерживаются на протяжении нескольких десятков тысяч лет.

Период пульсаций звезды обычно близок к периоду ее собственных колебаний, который определяется гидродинамическим временем, а значит, зависит лишь от средней плотности звезды. Большая разница плотностей у звезд, пересекающих полосу неустойчивости в разных ее частях, объясняет, почему у гигантов-цефеид периоды колебаний составляют десятки суток, а у белых карликов (переменных типа ZZ Cet) – минуты.

У ряда цефеид период пульсаций измеряли в течение длительного времени с очень высокой точностью, что позволило обнаружить систематическое увеличение или уменьшение периода. Это указывает на изменение средней плотности звезды, вызванное изменением ее радиуса по мере того, как звезда пересекает полосу неустойчивости. В зависимости от того, на каком этапе эволюции мы застали звезду, она может перемещаться на ГР-диаграмме слева направо или справа налево. В результате происходит либо увеличение, либо уменьшение ее радиуса. Вычисленная по скоро-

сти изменения периода пульсаций скорость изменения радиуса цефеид соответствует предсказаниям теории.

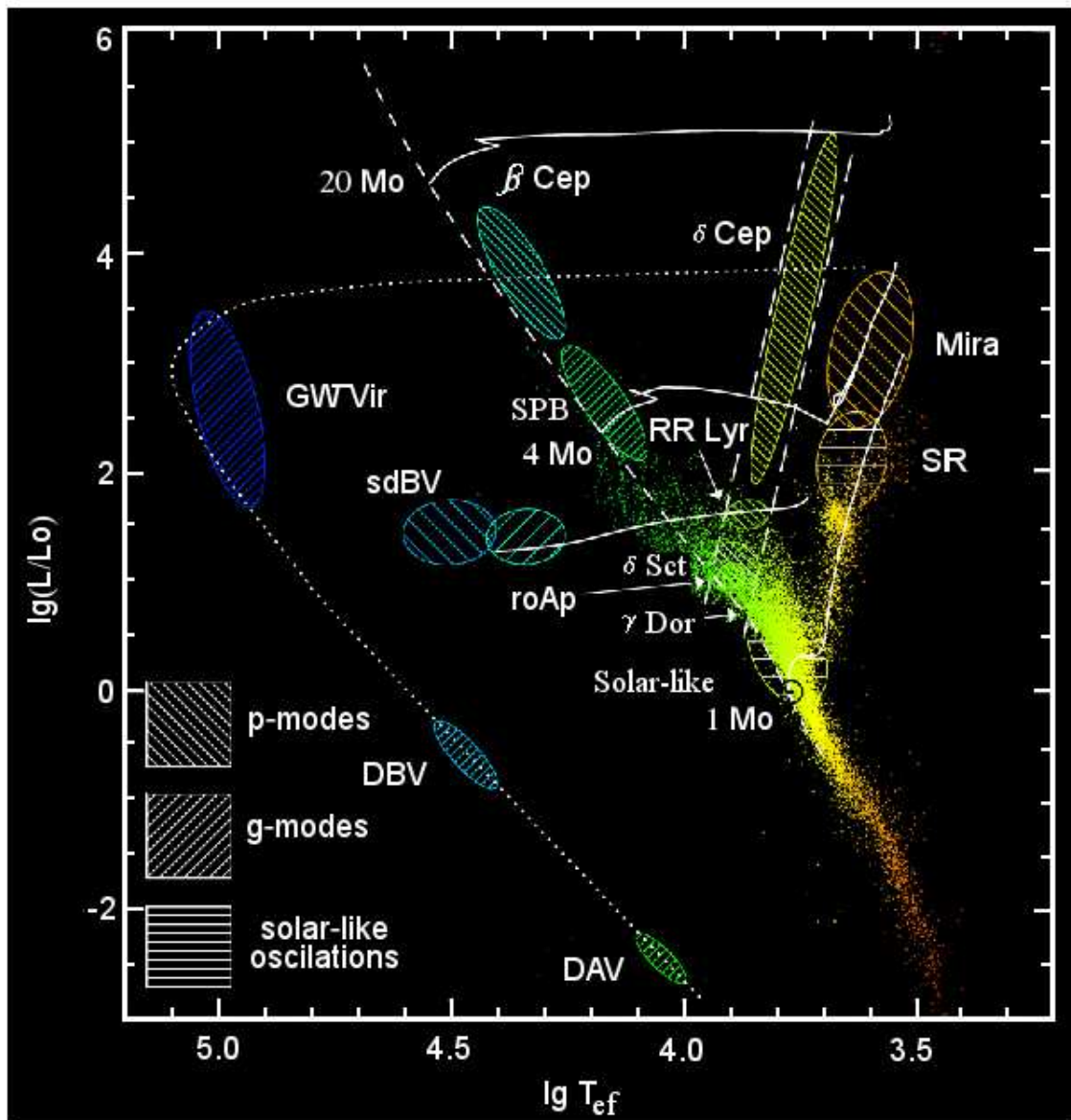


Рис. XVI.1: Локализация звезд с различными типами радиальных пульсаций на диаграмме Г-Р. Взято с ???

Несколько по другому работает κ -механизм, поддерживающий радиальные пульсации звезд верхней части главной последовательности: т.н. медленно пульсирующих В-звезд ($M \simeq 3 - 8 M_{\odot}$), которым на Рис. XVI.1 соответствует обозначение SPB, и более массивных ($M \simeq 8 - 20 M_{\odot}$) звезд типа β Цефея. Возбуждение колебаний у этих

звезд, по-видимому, происходит в зоне неполной ионизации элементов группы железа в районе $T = 2 \cdot 10^5$ К. Возможно, что помогает возбуждать колебания в этом случае и то обстоятельство, что в зоне, где работает κ -механизм, существенный вклад в давление вносит излучение, что, согласно (III.50), дополнительно понижает величину γ . Теория предсказывает, что у голубых гигантов главной последовательности доступные наблюдению моды имеют заметную амплитуду даже внутри конвективного ядра, что позволяет методами астросейсмологии исследовать их внутреннее строение почти до самого центра. В этом смысле особые надежды сейчас возлагают на космические обсерватории "Corot" (Degroote et al. 2009) и "Kepler" (Gilliland et al. 2010).

Подробное изложение теории звездных пульсаций можно найти в книге Дж.Кокса [3].

Sonoi T., Shibahashi H., PASJ 63, 95 *Vibrational Instability of Population III Low-Mass Stars due to the ε -Mechanism* PASJ 63, 95 (2011)

Ответы и решения

I. Механическое равновесие звезд

I.1. Сила взаимодействия двух половинок продолговатого тела:

$$F_g \sim \frac{G(M/2)^2}{R^2} = \frac{GM^2}{4R^2}.$$

Будем считать, что форма тела не слишком отличается от сферической, поэтому давление на границе двух половинок тела и его плотность порядка:

$$P_g \sim \frac{F_g}{4\pi R^2}, \quad \rho \sim \frac{M}{4R^3}$$

соответственно.

Гравитационное притяжение сжимает тело, вызывая его деформацию, величина которой связана с давлением законом Гука:

$$P = E \frac{\Delta R}{R},$$

где E – т.н. модуль Юнга.

Примем, что сжатие существенно, если величина относительной деформации превышает несколько процентов, скажем, 3%. Тогда гравитация начинает играть заметную роль в случае тел, для которых выполняется условие:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{P_g}{E} \sim \frac{GM^2}{16\pi ER^4} \sim \frac{GR^2\rho^2}{\pi E} > 0.03,$$

т.е. для тел с размером

$$R > \left(\frac{0.03\pi E}{G\rho^2} \right)^{1/2} \sim 1000 \text{ км},$$

где для численной оценки принято $E = 10^{11}$ эрг/см³, $\rho = 3$ г/см³.

I.2. Пусть имеется (цилиндрическая) гора высотой h с массой m и площадью основания S . Тогда создаваемое горой давление на кору планеты

$$P = \frac{gm}{S} = \rho gh.$$

Под давлением кора начнет деформироваться, и гора будет оседать. Примем, что проседание коры станет существенным, когда относительная деформация ее вещества $\Delta l/l$ превысит 3 %. Тогда из закона Гука получим:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\rho g h}{E} \leq 0.03 \quad \Rightarrow \quad h \leq \frac{0.03 E}{\rho g},$$

что для Земли, например, дает $h \leq 10$ км.

Поскольку $g = GM/R^2 \sim 4\rho R$, имеем: $h/R \propto R^{-2}$, т.е. относительный размер неровностей быстро убывает с увеличением размеров планет.

I.3. Исходное выражение для потенциала имеет вид:

$$\varphi(r) = - \int_r^\infty \frac{Gm}{r^2} dr.$$

Вычислим входящий в него интеграл по частям, обозначив $u = Gm$, $dv = r^{-2}dr$. Тогда $du = Gdm$, $v = -1/r$, откуда

$$\varphi(r) = \left[\frac{Gm}{r} \right]_r^\infty - \int_m^M \frac{Gdm}{r}.$$

Отсюда получается искомое соотношение, если учесть, что $m = M$ при $r = \infty$.

I.4. Вычислим интеграл I_1 по частям, обозначив $u = \varphi$, $dv = dm$. Тогда $du = d\varphi$, $v = m$, откуда

$$I_1 = [\varphi_s M - \varphi_0 \cdot 0] - \int_{\varphi_0}^{\varphi_s} m d\varphi,$$

где $\varphi_s = -GM/R$ – потенциал на поверхности (surface) звезды, а φ_0 – потенциал в центре звезды, величина которого заранее неизвестна, но имеет конечное значение, поэтому

$$I_1 = -\frac{GM^2}{R} - \int_{\varphi_0}^{\varphi_s} m d\varphi.$$

Согласно (I.7), $d\varphi = Gm dr/r^2$, следовательно

$$I_1 = -\frac{GM^2}{R} - \int_0^R \frac{Gm^2}{r^2} dr.$$

Новый интеграл опять вычислим по частям, обозначив $u = Gm^2$, $dv = dr/r^2$. Тогда $du = 2Gm dm$, $v = -1/r$, так что

$$I_1 = -\frac{GM^2}{R} - \left[-\frac{GM^2}{R} - 0 \right] - \int_0^M \frac{2Gm}{r} dm = - \int_0^M \frac{2Gm}{r} dm,$$

что и требовалось доказать.

I.5. Если механически повторять рассуждения, приведенные на стр.11, получим следующее. Сила притяжения оболочки к центру $F_g = -4\pi r^2 \rho dr \cdot Gm/r$, а архимедова сила $F_a = 4\pi r^2 P - 4\pi(r + dr)^2(P + dP)$, что с точностью до малых второго порядка дает $F_a = r^2 dP + 2rP dr$. Из условия $F_g = F_a$ получаем:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} - \frac{2P}{r},$$

что отличается от (I.12) дополнительным членом $-2P/r$.

Ошибка состоит в том, что силы F_g и F_a для сферической оболочки в целом, на самом деле, равны нулю, а не тем выражениям, которые мы получили! Действительно, вектора каждой из этих сил, действующие на любую пару диаметрально противоположных элементов оболочки, равны по величине, но противоположно направлены.

Заметим, что если в процессе "вывода" для площади внешней границы оболочки вместо $4\pi(r + dr)^2$ написать $4\pi r^2$, то получается соотношение (I.12). К сожалению, в таком виде "вывод" этого соотношения встречается в научно-популярной литературе...

I.6.

$$\frac{df}{dr} = \frac{dP}{dr} + \frac{3Gm}{4\pi r^4} \frac{dm}{dr} - \frac{3Gm^2}{2\pi r^5} = \rho \frac{2Gm}{r^2} - \frac{3Gm^2}{2\pi r^5} = -\frac{2Gm}{r^2} [\bar{\rho} - \rho] \leq 0.$$

Таким образом $f(r)$ – не возрастающая функция, откуда, с учетом $P(R) = 0$, и следует неравенство (I.46).

В соотношениях (I.16) и (I.46) знак равенства соответствует случаю, когда в оболочке $\rho(r) = const$. Если плотность вещества постоянна также и в ядре звезды, то из (I.46) получается выражение для P_b^{min} , совпадающее с (I.16).

I.7. Предположим, что масса атмосферы $M_a \ll$ массы Земли M_\oplus , а ее протяженность $\ll R_\oplus$. Тогда уравнение (I.15) запишется в виде:

$$P_a = \int_{M_\oplus}^{M_\oplus + M_a} \frac{Gm}{4\pi r^4} dm \simeq \frac{GM_\oplus M_a}{4\pi R_\oplus^4} = \frac{g_0 M_a}{4\pi R_\oplus^2},$$

где g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли.

Утверждение: "атмосферное давление равно 760 мм ртутного столба" означает, что $P_a = \rho_{Hg} g_0 h_0$, поэтому

$$M_a \simeq 4\pi R_\oplus^2 \rho_{Hg} h_0 \simeq 5 \cdot 10^{21} \text{ г}.$$

Таким образом, масса атмосферы примерно в миллион раз меньше массы Земли.

I.8. Полагая в (I.16) $M_c = 0$ получаем:

$$P_0 \geq \frac{3GM^2}{8\pi R^4}.$$

Подставляя численные значения R_\odot и M_\odot находим, что P_0 превышает давление земной атмосферы на уровне моря примерно в 10^9 раз.

I.9. Согласно (I.4)

$$-\frac{1}{r} \leq -\frac{1}{R} \left(\frac{M}{m} \right)^{1/3},$$

поэтому

$$U = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm \leq -\frac{GM^{1/3}}{R} \int_0^M m^{2/3} dm = -\frac{3GM^2}{5R},$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства соответствует случаю однородного шара. Полученный результат показывает, что у звезд с одинаковой массой, но разным законом изменения плотности $\rho(r)$ наименьшей (по модулю) энергией связи обладает однородная звезда, т.е. ее легче всего разрушить.

Доказанное неравенство первым получил A.Ritter в 1882 г. [12]

I.10. Проинтегрируем уравнение движение внешнего слоя звезды с начальными условиями $R = R_0$, $\dot{R} = 0$ при $t = 0$:

$$\ddot{R} \equiv \frac{d\dot{R}}{dt} = \dot{R} \frac{d\dot{R}}{dR} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{R}^2}{dR} = -\frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{2GM}{R_0}}.$$

Следовательно:

$$t_{ff} = \left(\frac{R_0^3}{2GM} \right)^{1/2} \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx,$$

откуда и получается соотношение (I.47).

I.11. Согласно (I.35) тепловая энергия 1 г газа равна

$$E(m) = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{E_e(m)}{\xi^{3\gamma-3}}.$$

Полная энергия звезды W меняется в зависимости от ξ следующим образом:

$$W = Q + U = \int_0^M E dm - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = Q_e \xi^{3-3\gamma} - \xi^{-1} |U_e|.$$

Согласно (I.36) $U_e = (3 - 3\gamma) Q_e$, поэтому

$$W = \frac{|U_e|}{(3\gamma - 3)} \xi^{3-3\gamma} - \frac{|U_e|}{\xi} \Rightarrow \frac{dW}{d\xi} = \frac{|U_e|}{\xi^2} (1 - \xi^{4-3\gamma}).$$

Отсюда видно, что если $\gamma \neq 4/3$, то функция $W(\xi)$ имеет экстремум при $\xi = 1$. Иными словами, среди рассматриваемых конфигураций экстремум полной энергии соответствует гидростатически равновесной звезде. Так как

$$\left(\frac{d^2 W}{d\xi^2} \right)_{\xi=1} = 3(\gamma - 4/3) \cdot |U_e|,$$

то этот экстремум является минимумом при $\gamma > 4/3$ и максимумом при $\gamma < 4/3$.

Поскольку состояния, соответствующие максимуму энергии, являются неустойчивыми, приходим к выводу, что звезды с $\gamma < 4/3$ существовать не могут.

I.12. Предположим, что сферическая область с массой m и радиусом r начала сжиматься или расширяться со скоростью \dot{r} . Тогда через время dt радиус этой области будет $r + \dot{r} dt$. Гомологичность сжатия (расширения) означает, что

$$\frac{r + \dot{r} dt}{r} = \xi = \text{const}(m).$$

Следовательно:

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\xi - 1}{dt} = \text{const}(m),$$

что и требовалось доказать.

I.13. Запишем закон сохранения массы (I.1) в виде:

$$\frac{dm}{4\pi} = \frac{\rho}{3} d(r^3)$$

а затем продифференцируем его по времени. Полагая, что m и t – независимые переменные, с учетом (I.48), получим:

$$0 = \frac{\dot{\rho}}{3} d(r^3) + \rho d\left(\frac{\dot{r}}{r} \cdot r^3\right) = \left(\frac{\dot{\rho}}{3} + \frac{\rho \dot{r}}{r}\right) \cdot d(r^3),$$

откуда и получается первое из соотношений (I.49).

Чтобы получить второе соотношение, перепишем уравнение гидростатического равновесия (I.20) в форме:

$$P(m) = \int_m^M \frac{Gm dm}{4\pi r^4}.$$

Продифференцируем это выражение по времени, учтем, что порядок дифференцирования и интегрирования по переменным m и t можно менять местами, и используем соотношение (I.48). Тогда получим:

$$\dot{P} = \int_m^M \frac{\partial}{\partial t} (r^{-4}) \frac{Gm dm}{4\pi} = \int_m^M -4 \frac{\dot{r}}{r} \frac{Gm dm}{4\pi r^4} = -4 \frac{\dot{r}}{r} \int_m^M \frac{Gm dm}{4\pi r^4} = -4 \frac{\dot{r}}{r} P,$$

откуда следует искомое соотношение.

Во избежание недоразумений отметим следующее. При выводе критерия устойчивости в разделе I.7 мы также рассматривали гомологические преобразования, используя соотношение (I.39). Если его прологарифмировать, а затем продифференцировать по времени, то, учитывая, что $P_e(m)$ и $\rho_e(m)$ не зависят от времени, получим равенство:

$$\frac{\dot{P}}{P} = \gamma \cdot \frac{\dot{\rho}}{\rho},$$

которое отличается от (I.49). Поясним, в чем тут дело.

При выводе критерия устойчивости мы считали, что сжатие или расширение звезды происходит адиабатически, и заранее не предполагали, что вновь возникшие конфигурации будут гидростатически равновесными. А при выводе (I.49), мы, наоборот, исходили из того, что в результате гомологических преобразований возникнут гидростатически равновесные конфигурации, но не требовали, чтобы этот процесс протекал адиабатически. Поскольку оба соотношения совпадают при $\gamma = 4/3$, можно заключить, что протекающие адиабатически гомологические преобразования звезды не нарушают ее механического равновесия только в том случае, если звезда состоит из вещества с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$.

II. Политропные звезды

II.2. Величины, входящие в выражение для r_0 имеют следующую размерность:

II.3 . Рассмотрим совокупность политропных звезд с одинаковой величиной индекса политропы n . В зависимости от значений параметров K и ρ_0 эти звезды будут иметь различные массы M и радиусы R . Из соотношений (II.19) и (II.22) следует, что для каждой из рассматриваемых звезд справедливы соотношения:

$$\frac{r}{R} = \frac{\xi}{\xi_n}, \quad z = z_n \frac{m}{M}.$$

Поскольку $z = z(\xi)$ – монотонно возрастающая функция, то можно обратить ситуацию и рассматривать ξ как однозначную функцию z . Функция $\xi = f(z)$ при фиксированном значении n является универсальной, поэтому из соотношения

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{\xi_n} \cdot f\left(z_n \frac{m}{M}\right) \quad (\text{XVI.2})$$

следует что при одинаковых относительных значениях массы m/M все звезды рассматриваемой совокупности будут иметь одинаковый относительный радиус r/R .

Относительная плотность $\rho(r)/\rho_0 = \theta^n$ и относительное давление $P(r)/P_0 = \theta^{1+1/n}$ у этих звезд являются универсальной функцией ξ . Следовательно обе эти величины у политропных звезд с одинаковым индексом также являются одинаковыми при одинаковых значениях величины r/R или, как мы только что выяснили, m/M – см. Рис.II.2.

Собственно это и означает, что звезды с одинаковым индексом политропы гомологичны. В частности, если две такие звезды имеют одинаковую массу, то отношение

радиусов при одной и той же массе m у этих звезд будет одинаковым: параметр ξ , который мы использовали, например, в разделе I.7, будет в этом случае равен отношению радиусов этих звезд R_1/R_2 .

II.4.

$$U_5 = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = -4\pi G \int_0^\infty m r \rho dr = - \frac{2^{3/2} 3^{5/2} K^{5/2}}{\pi^{1/2} G^{3/2}} \cdot \int_0^\infty z \xi \theta^5 d\xi.$$

С учетом (II.27) находим, что безразмерный интеграл равен $3\sqrt{3}/16$. Тогда выражая K из (II.28) получим искомое соотношение для U_5 .

II.6. ...???

II.7.???

II.8. Возможность записать выражение для E_g в указанном виде следует из соображений размерности. Переходя к безразмерным переменным получим:

$$E_g = \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = \frac{Gm_0^2}{r_0} \cdot I_g, \quad I_g \equiv \int_0^Z \frac{z}{\xi} dz.$$

Вычисляя интеграл I_g с помощью соотношений (II.41) и (II.42), а затем возвращаясь к "размерным" переменным получим искомые асимптотики для k_g .

II.9. ...???

II.10. Рассмотрим совокупность гидростатически равновесных изотермических шаров с массой M , которые будем рассматривать, как модель центральной части звезды (ядра). Предположим, что газ этих шаров описывается уравнением состояния (II.36), а величины T и μ в ядре одинаковы для всех шаров. В зависимости от величины центральной плотности эти шары будут иметь различные радиусы R и давление P_s на внешней границе. Тогда теорема вириала запишется в виде:

$$4\pi R^3 P_s = 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm. \quad (\text{XVI.3})$$

Поскольку в нашем случае $P/\rho = \Re T/\mu \equiv K = \text{const}$ первый интеграл равен $3KM$. Второй интеграл I_2 запишем в виде:

$$I_2 = k_g \frac{GM^2}{R},$$

где, как показано в Задаче II.8, структурный множитель $k_g \simeq 0.8$ с точностью не хуже 20 %. Тогда (XVI.3) запишется в виде:

$$P_s \simeq \frac{3KM}{4\pi R^3} - k_g \frac{GM^2}{4\pi R^4}.$$

Вычислив производную dP_s/dR (при фиксированных M и K) и положив ее равной нулю получим, что функция $P_s(R)$ достигает максимального значения

$$P_s^{max} = \frac{2187}{1024\pi k_g^3} \cdot \frac{K^4}{G^3 M^2} \simeq 1.3 \frac{K^4}{G^3 M^2}$$

при

$$R = \frac{4k_g}{9} \cdot \frac{GM_c}{K} \simeq 0.36 \frac{GM_c}{K}.$$

Сравнение с (II.46) показывает, что полученные значения отличаются от точных менее чем на 10 %. Однако поведение функции $P_s = P_s(R)$ при $R \rightarrow 0$ явно не физическое: $P_s \rightarrow -\infty$. Это связано с тем, что при уменьшении радиуса шара с данной массой его плотность возрастает, и в какой-то момент наступит вырождение электронного газа (подробнее см. раздел IV), в результате чего уравнение состояния (II.36) окажется неприменимым.

II.11. Из соотношений (II.33) и (II.48) получим:

$$M_c = z_c \cdot 4\pi \left(\frac{5\Re}{8\pi G\mu} \right)^{3/2} T_0^{3/2} \rho_0^{-1/2}.$$

где T_0 и ρ_0 – температура и плотность в центре звезды. Поскольку $\rho_c/\rho_0 = \theta_c^{3/2}$, $T_c/T_0 = \theta_c$ и $M_c = M z_c/z_f$ имеем:

$$\frac{M^2 \rho_c}{T_c^3} = \frac{125 \Re^3 z_f^2}{32\pi G^3 \mu^3 \theta_c^{3/2}}.$$

Выше было показано, что задав отношение M_c/M можно однозначно определить величины θ_c , z_c и z_f . Поэтому для звезд с одинаковой величиной M_c/M правая часть полученного равенства должна иметь одно и то же значение, откуда следует соотношение (II.53).

Используя соотношения (II.49) можно связать величины T_c и ρ_c с радиусом звезды R :

$$R = \xi_f r_{0e} = \xi_f \left(\frac{\Re T_c}{\pi \mu_c G \rho_c} \right)^{1/2}.$$

Поскольку ядро описывается политропой с $n = 3/2$, получаем:

$$\frac{T_0^{3/2}}{\rho_0} = \frac{T_c^{3/2}}{\rho_c} = \frac{T_c^3}{\rho_c \theta_c^{3/4} T_0^{3/2}} \quad \text{или} \quad \frac{T_c^3}{\rho_c} = \theta_c^{3/2} \cdot \frac{T_0^3}{\rho_0}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\frac{T_c}{\rho_c} = \theta_c^{-1/2} \frac{T_0}{\rho_0}.$$

Следовательно, соотношение (II.53) и равенство, связывающее R с величинами ρ_c , T_c можно переписать в виде:

$$\frac{T_0^3}{\rho_0} = \text{const} \cdot M^2, \quad \frac{T_0}{\rho_0} = \text{const} \cdot R^2,$$

откуда и получаются искомые соотношения (II.54).

Отметим в заключение, что из равенства $R_c/R = \xi_c/\xi_f = \text{const}$ следует, что у рассматриваемых двухполитропных звезд относительный размер конвективного ядра есть величина постоянная.

III. Уравнение состояния звездного вещества

III.1. Искомые величины находятся из соотношения:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

где $m = m_p$ для протонов и $m = m_e$ для электронов. Подставляя получим: $v_p \simeq 6.1 \cdot 10^7$ см/с, $v_e \simeq 2.6 \cdot 10^9$ см/с.

III.4. Пусть N_H , N_{H2} , N_{He} – число атомов водорода, молекул водорода и атомов гелия в единице объема. В состав атома водорода входит 1 нуклон, молекулы водорода – 2 нуклона, а в ядро гелия – 4 нуклона. Поэтому из определения величины μ (III.21) получаем:

$$\mu = \frac{N_H + 2N_{H2} + 4N_{He}}{N_H + N_{H2} + N_{He}}.$$

Из определения величин X , Y и x имеем:

$$X = \frac{N_H + 2N_{H2}}{N_H + 2N_{H2} + 4N_{He}}, \quad Y = \frac{4N_{He}}{N_H + 2N_{H2} + 4N_{He}}, \quad x = \frac{N_{H2}}{N_H + N_{H2}}.$$

Отсюда следует, что:

$$N_H + 2N_{H2} = (1 + x)(N_H + N_{H2}), \quad \frac{N_H + 2N_{H2}}{4N_{He}} = \frac{X}{Y}.$$

Если подставить эти соотношения в выражение для μ , получим (III.59). Отметим, что в рассматриваемом случае $X + Y = 1$.

III.5. Искомая величина находится из соотношений (III.35):

$$N_e^0 = \frac{\rho_0(1 + X_0)}{2m_u} \simeq 5 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}.$$

III.6. Будем приписывать величинам, относящимся к электронам, индекс e , а к ядрам (α -частицам) – индекс α . Учитывая аддитивность энтропии (III.18) имеем: $S = (s_e + s_\alpha)/\rho$. Тогда из выражения (III.17), с учетом $\rho = 4m_u N_\alpha$ и $\Re = m_u/k$, имеем:

$$\frac{S}{\Re} = \frac{N_\alpha + N_e}{4N_\alpha} \left\{ \frac{3}{2} \ln T + \ln \left[2e^{5/2} \left(\frac{2\pi k}{h^2} \right)^{3/2} \right] \right\} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{N_\alpha}{m_\alpha^{3/2}} \right) - \frac{N_e}{4N_\alpha} \ln \left(\frac{N_e}{m_e^{3/2}} \right).$$

где учтено, что статистические веса $g_e = g_\alpha = 2$. С помощью условия электронейтральности газа $N_e = 2 N_\alpha$, это соотношение преобразуется к искомому виду.

III.7. При адиабатическом процессе энтропия должна оставаться постоянной. Из (III.42) следует, что при $S = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ должно выполняться условие $T^{3/2}/\rho = \text{const}$. Поскольку $P \propto \rho T$, то получается, что при адиабатическом процессе $P \propto \rho^{5/3}$. Что и требовалось доказать.

III.8. Запишем уравнение состояния (III.49) в виде:

$$P = \frac{\rho \Re T}{\mu} \cdot (1 + \delta).$$

Если всем величинам, относящимся к центру звезды, приписывать индекс 0, то из соотношения (II.3) получим:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho T (1 + \delta)}{\rho_0 T_0 (1 + \delta_0)} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1+1/n}.$$

Следовательно:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1 + \delta_0}{1 + \delta} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/n}.$$

Тогда

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{1 + \delta_0}{1 + \delta} \right)^3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(3-n)/n}.$$

Окончательно имеем:

$$f(\delta) \equiv \delta(1 + \delta)^3 = \delta_0(1 + \delta_0)^3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(3-n)/n}.$$

Из полученного выражения следует, что при $n > 3$ величина f возрастает от центра звезды наружу, а при $n < 3$, наоборот, убывает. Функция $f(\delta)$ при $\delta > 0$ – монотонно возрастающая, поэтому и отношение P_r/P_g при $n > 3$ должно возрастать от центра звезды наружу, а при $n < 3$ убывать. Политропа с индексом $n = 3$ соответствует модели звезды, у которой отношение лучевого давления к газовому не меняется вдоль радиуса.

III.9. При адиабатическом процессе энтропия должна оставаться постоянной. Из (III.48) следует, что при $S = \text{const}$ должно выполняться условие $T^3/\rho = \text{const}$. Поскольку $P \propto T^4$, то получается, что при адиабатическом процессе $P \propto \rho^{4/3}$. Что и требовалось доказать.

III.10. Соотношение (III.24) для реакций (III.2) и (III.3) имеет вид:

$$\eta_H + \eta_\gamma = \eta_p + \eta_e, \quad \eta_{tH} + \eta_e = \eta_p + 2 \cdot \eta_e,$$

где η_H , η_p , η_e , и η_γ – химический потенциал атомов водорода, протонов, электронов и чернотельного излучения соответственно. Почленно вычитая второе равенство из первого получим требуемый результат: $\eta_\gamma = 0$.

III.11. Если вклад вещества в плотность пренебрежимо мал ($T > 0$, $\beta = 0$), то

$$\rho = \frac{E_r}{c^2} = \frac{aT^4}{c^2}, \quad P = P_r = \frac{aT^4}{3}, \quad \gamma = \frac{4}{3}.$$

Подставляя эти соотношения в общее выражение для скорости звука $V_s^2 = \gamma P / \rho$ получаем искомый результат.

Заметим однако, что при низкой плотности вещества и высоких температурах будет происходить интенсивное рождение электрон-позитронных пар, плотность энергии которых в $7/4$ раз больше, чем плотность энергии излучения – см. (III.58). Это обстоятельство следует учитывать при вычислении V_s в горячей плазме низкой плотности.

III.12. Поскольку $P_r/P_g \propto T^3/\rho$, а в изотермическом ядре плотность убывает наружу, излучение будет вносить максимальный вклад в давление на внешней границе ядра. Примем, что роль излучения станет существенной, когда в этой точке отношение P_r/P_g превысит 1.

Если обозначить через ρ_s^{max} максимально возможную плотность газа на границе изотермического ядра, то условие $P_r/P_g \leq 1$ для этой точки запишется в виде:

$$\rho_s^{max} \geq \frac{aT^3\mu}{3\Re}.$$

Из соотношения (II.46) с учетом $\rho_s^{max} = P_s^{max}/K$, где $K = \Re T/\mu$, получим:

$$1.40 \frac{\Re^3 T^3}{G^3 M_c^2 \mu^3} \geq \frac{aT^3\mu}{3\Re}.$$

Отсюда, учитывая что $\mu = 4/3$, получаем:

$$M_c \leq M_c^{max} = \frac{\Re^2}{\mu^2} \sqrt{\frac{4.2}{aG^3}} \simeq 2.7 M_\odot.$$

Любопытно, что ответ не зависит от температуры ядра.

IV. Уравнение состояния звездного вещества

IV.1. Пусть \mathbf{v} – скорость электрона, а (параллельный ему) вектор \mathbf{p} – его импульс. Найдём среднее значение проекции произведения этих величин на произвольно выбранную ось X . Для этого рассмотрим совокупность электронов, скорости которых образуют с положительным направлением оси X угол $\theta < 90^\circ$: только эти электроны создают давление на площадку, перпендикулярную данной оси. Поскольку

электроны движутся хаотически (все направления движения равновероятны), можно написать:

$$\langle v_x p_x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} v_x p_x d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла, который в нашем случае равен $2\pi \sin \theta d\theta$. Поскольку $v_x = v \cos \theta$, $p_x = p \cos \theta$, получаем:

$$\langle v_x p_x \rangle = v p \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{vp}{3}.$$

Что и требовалось доказать.

IV.2. В изотермическом ядре звезды степень вырождения электронного газа максимальна в центре. Примем, что вырождением в центре можно пренебречь, если $T \geq T_F = A\rho_0^{2/3}$, где ρ_0 – центральная плотность, $A \approx 3 \cdot 10^5 / \mu_e^{2/3}$ согласно (IV.11), причем для гелия $\mu_e = 2$.

Тогда, используя выражение (II.47) для центральной плотности изотермического шара, соответствующей максимальному давлению на его поверхности, имеем:

$$\frac{\Re^3 T^3 z_*^2}{4\pi \mu^3 G^3 M_c^2} \leq \frac{T^{3/2}}{A^{3/2}},$$

где M_c – масса ядра звезды, $\mu = 4/3$ – молекулярный вес гелия, а $z_* \approx 15.7$. Следовательно:

$$M_c \geq M_c^{min} = \frac{z_* \Re^{3/2} A^{3/4} T^{3/4}}{2\sqrt{\pi} \mu^{3/2} G^{3/2}} \approx 0.17 M_\odot \left(\frac{T}{2 \cdot 10^7} \right)^{3/4}.$$

IV.3. Мерой неидеальности электронного газа в данном случае является отношение E_K/E_F . Согласно (IV.11), энергия Ферми $E_F \propto N_e^{2/3}$, а из соотношений (IV.16) и (IV.18) следует, что энергия кулоновского взаимодействия $E_K \propto N_e^{-1/3}$. Поэтому отношение

$$\frac{E_K}{E_F} \propto \frac{1}{N_e},$$

т.е. уменьшается с ростом плотности. Что и требовалось доказать.

IV.4. Подставляя численные значения в соотношения (III.25) и (III.29) получим:

$$N_1 + N_0 \simeq 10^{26}, \quad \frac{N_1^2}{N_0} \simeq 1.7 \cdot 10^{26}.$$

Поделив второе соотношение на первое получим для степени ионизации $x = N_1/(N_1 + N_0)$ уравнение:

$$x^2 + 1.7x - 1.7 = 0,$$

откуда следует, что $x \simeq 0.7$.

Таким образом, если бы уравнение Саха можно было применять в рассматриваемой ситуации, то примерно треть атомов водорода в центральных областях Солнца

не было бы ионизовано. Однако при плотности 150 г/см^3 среднее расстояние между частицами меньше 10^{-8} см , т.е. первой боровской орбиты атома H, поэтому, на самом деле, водород в центре Солнца практически полностью ионизован.

V. Термоядерные реакции и β -процессы

V.1. Реакции, в результате которых появляется позитрон, по сути дела, сводятся к превращению одного из протонов исходного ядра в нейтрон: $p \rightarrow n + e^+ + \nu$. Но исходное вещество было электронейтрально, следовательно протону в исходном ядре соответствовал свободный электрон. С учетом этого обстоятельства реакцию превращения протона в нейтрон можно записать в виде: $e^- + p \rightarrow e^- + n + e^+ + \nu \rightarrow n + \nu$. Сравнивая левую и правую части этой реакции получаем, что $Q = (m_n - m_p)c^2 + m_e c^2$, т.е. вклад в энергосодержание за счет аннигиляции равен $m_e c^2$, а не величине вдвое большей.

V.2. При аннигиляции электрона и позитрона должно появиться не менее двух квантов. Действительно, если перейти в систему отсчета, связанную с центром масс e^+ и e^- , то суммарный импульс частиц равен нулю, поэтому один квант, который имеет импульс E_γ/c , появиться не может: должны родиться либо два кванта с одинаковой энергией E_γ , летящие в противоположные стороны, либо еще большее их количество (с суммарным импульсом равным нулю), что гораздо менее вероятно. Таким образом, в излучение переходит энергия $2m_e c^2$, которая делится поровну между двумя квантами.

V.3. Чтобы сблизить два протона следует совершить работу против сил кулоновского отталкивания, равную

$$\frac{e^2}{r_n} \simeq 2.3 \cdot 10^{-6} \text{ эрг.}$$

В реакции синтеза дейтерия выделяется энергия

$$(2m_p + m_e - m_D)c^2 = 2.1 \cdot 10^{-3} m_u c^2 \simeq 3.1 \cdot 10^{-6} \text{ эрг,}$$

где m_e – масса позитрона. Здесь мы учли энергию, выделяющуюся при аннигиляции рождающегося в реакции позитрона.

V.4. В рассматриваемой ситуации уравнение (V.38) можно записать в виде:

$$\frac{dX_p}{dt} = -X_p^2 \cdot \frac{\rho N_A \langle \sigma v \rangle_{pp}}{2} \equiv -C \cdot X_p^2,$$

где C – постоянная величина. Решение этого дифференциального уравнения с начальным условием $X_p = X_p^0$ при $t = 0$ имеет вид:

$$X_p = \frac{X_p^0}{1 + CX_p^0 t}.$$

Следовательно, концентрация ядер водорода достигнет значения $X_p^0/2$ через время

$$t_{1/2} = \frac{1}{CX_p^0} \equiv \frac{2}{X_p^0 \rho N_A \langle \sigma v \rangle_{pp}} = t_{pp},$$

где t_{pp} – время, которое получается из формулы (V.46).

VI. Термоядерные реакции в звездах.

VI.1. Для земного наблюдателя основным источником нейтрино является первая реакция p-p цепочки (VI.1), протекающая на Солнце. Суть реакций p-p цепочки – объединение четырех протонов в ядро гелия, в процессе которого два протона превращаются в нейтроны, порождая два нейтрино: $4p \rightarrow \text{He} + 2\nu$. Можно сказать, что рождение двух нейтрино сопровождается выделением энергии $\Delta E = 4m_p c^2 - m_{\text{He}} c^2 \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ эрг. Нейтрино уносят лишь небольшую часть этой энергии, которая, в основном, превращается в тепло и, в конечном счете, высвечивается с поверхности Солнца. Следовательно, за 1 секунду в недрах Солнца происходит рождение $\sim L_\odot / \Delta E \sim 10^{38}$ ядер гелия и вдвое большее количество нейтрино. Принимая площадь глаза равной 1 см^2 и расстояние до Солнца $d = 1.5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ получим искомый результат:

$$N_\nu \sim \frac{2 L_\odot}{\Delta E 4\pi d^2} \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}.$$

VI.2. Основным процессом, генерирующим антивещество в недрах Солнца в форме позитронов, является первая реакция pp-цепочки (VI.1). За 1 секунду в этой реакции рождается столько же позитронов, сколько и нейтрино, т.е. $\mathcal{N}_+ \sim 2L_\odot / \Delta E \sim 2 \cdot 10^{38} \text{ с}^{-1}$ – см. задачу VI.1.

Гибнут позитроны в результате аннигиляции с электронами окружающей среды. Среднее время жизни позитрона в области, где протекают реакции (VI.1), можно оценить с помощью соотношения (V.12), записав его в виде:

$$\Delta t_a = \frac{1}{\sigma_a n_e v},$$

где n_e и v – соответственно число электронов в 1 см^3 , и скорость относительного движения e^- и e^+ , усредненные по области взаимодействия, а σ_a – сечение аннигиляции.

В соответствии с условием задачи положим $\sigma_a \sim \pi r_e^2 \simeq 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$. Это довольно грубое приближение, поэтому вместо усреднения величин n_e и v примем их значения в центре Солнца: $n_e \sim 5 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ (см. задачу III.5) и $v \sim v_e \sim 3 \cdot 10^9 \text{ см/с}$ (см. задачу III.1), где v_e – средняя тепловая скорость движения электронов. Подставляя получим: $\Delta t_a \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$ – таково среднее время жизни позитрона.

Если полное количество позитронов во всей интересующей нас области равно N_+ , то каждую секунду должно погибать $\mathcal{N}_a = N_+ / \Delta t_a$ позитронов. (Аналогия: если на Земле живет N человек, а средняя продолжительность жизни – Δt лет, то отсюда следует, что в среднем ежегодно умирает $N / \Delta t$ человек.)

Количество рождающихся и гибнущих позитронов должно быть одинаковым (условие стационарности), поэтому $N_+ = \mathcal{N}_a \Delta t_a = \mathcal{N}_+ \Delta t_a \sim 10^{32}$. Следовательно, масса антивещества на Солнце составляет $m_e N_+ \sim 100$ кг.

VI.3. Из таблицы VI.1 видно, что в центральных областях Солнца $\varepsilon_{CNO} \propto T^{20}$, а $\varepsilon_{pp} \propto T^4$. Это значит, что по мере удаления от центра величина ε_{CNO} уменьшается гораздо быстрее, чем ε_{pp} , что и приводит к рассматриваемому эффекту.

VI.4. Выражение для светимости, обусловленной термоядерным горением водорода, в рассматриваемом случае ($X_H, X_2 = \text{const}$) можно записать в виде:

$$L = \int_0^M \varepsilon_{nuc} dm = 4\pi \int_0^R \varepsilon_{nuc} \rho r^2 dr \propto X_H X_2 \int_0^R \rho^2 T^s r^2 dr.$$

Следуя (II.19) перейдем к безразмерным переменным $\xi = r/r_0$, $\theta_n = (\rho/\rho_0)^{1/n}$. В зоне ядерного энерговыделения вещество практически полностью ионизовано, поэтому, согласно (III.34), постоянство химического состава означает постоянство μ . Тогда из (II.19) и (III.39) следует, что:

$$r_0 \propto T_0^{1/2} \rho_0^{-1/2}, \quad T = T_0 \theta_n.$$

Следовательно,

$$L_{nuc} \propto r_0^3 \rho_0^2 T_0^s \int_0^{\xi_n} \theta^{2n+s} \xi^2 d\xi \propto \rho_0^{1/2} T_0^{s+3/2} \int_0^{\xi_n} \theta^{2n+s} \xi^2 d\xi.$$

При заданном значении индекса политропы n интеграл в правой части есть некоторая константа, что и приводит к соотношению (VI.8).

Литература

- [1] Бисноватый-Коган Г.С., *Физические вопросы теории звездной эволюции*, М. Наука (1989)
- [2] Я.Б.Зельдович, С.И.Блинников, Н.И.Шакура, *Физические основы строения и эволюции звезд*, М.: Московский Университет (1981)
- [3] Кокс Дж. П. *Теория звездных пульсаций*, М.: Мир, (1983)
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Механика*, М. Наука (1988)
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теория поля*, М. Наука (19??)
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Статистическая физика*, М. Наука (19??)
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Гидродинамика*, М. Наука (1986)
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, М. Наука (1992)
- [9] Сарычева Л.И., *Введение в физику микромира – физика частиц и ядер*, М. УНЦ ДО (2005)
- [10] Михалас Д., *Звездные атмосферы*, М. Мир (1982)
- [11] Соболев В.В., *Курс теоретической астрофизики*, М. Наука (1985)
- [12] Чандрасекар С., *Введение в учение о строении звезд*, М. ИЛ (1950)
- [13] G.Audi, A.H.Wapstra, C.Thibault, *The Ame2003 atomic mass evaluation (II)*, Nuclear Physics A 729 337 (2003).
- [14] Baraffe I., *Brown dwarf ???*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. ?, ??? (200?)
- [15] Blinnikov S.I., Dunina-Barkovskaya N.V., Nadyozhin D.K., *Equation of State of a Fermi Gas: Approximations for Various Degrees of Relativism and Degeneracy*, Astrophysical Journal Supplement 106, 171 (1996)
- [16] Blinnikov S.I., Dunina-Barkovskaya N.V., Nadyozhin D.K., *Erratum Astrophysical Journal Supplement 118, 603* (1998)

- [17] Chabrier G., Baraffe I., *Theory of Low-Mass Stars and Substellar Objects*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 38, 337 (2000).
- [18] Catelan M., *Horizontal branch stars: the interplay between observations and theory, and insights into the formation of the Galaxy*, Astrophys. and Sp. Science 320, 261 (2009)
- [19] Eggleton P.P., Faulkner J., Cannon R.C., *A small contribution to the giant problem*, Monthly Notice Roy. Astron. Soc. 298, 831 (1998)
- [20] Filipeno??? ARAA 1996 ???
- [21] Fowler W., Caughlan G., Zimmerman B., *Thermonuclear reaction rates I*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 5, 525 (1967)
- [22] Fowler W., Caughlan G., Zimmerman B., *Thermonuclear reaction rates II*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 13, 69 (1975)
- [23] Harris M., Fowler W., Caughlan G., Zimmerman B., *Thermonuclear reaction rates III*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 21, 165 (1983)
- [24] Kasen D., *The supernova has two faces*, Nature 466, 37 (2010)
- [25] Kovetz A., Yaron O., Prialnik D., *A new efficient stellar evolution code for calculating complete evolutionary tracks*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 395, 1857 (2009)
- [26] Kippenhahn R., Weigert A., *Stellar Structure and Evolution*, Astron. and Astrophys. Library, Springer-Verlag (1990)
- [27] Meynet G.; Mermilliod, J.-C.; Maeder, A., *New dating of galactic open clusters*, 1993, Astron. Astrophys. Suppl. 98, 477
- [28] Paxton B., Bildsten L., Dotter A., Herwig F., Lesaffre P., Timmes F., *Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA)*, Astrophys. J. Suppl. 192, 3 (2011)
- [29] Popper D.M., *Stellar masses*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 18, 115 (1980)
- [30] Schonberg M., Chandrasekhar S., *On the Evolution of the Main-Sequence Stars*, Astrophys. J. 96, 161 (1942)
- [31] Siess L., E. Dufour E., Forestini M., *An internet server for pre-main sequence tracks of low- and intermediate-mass stars*, Astron. Astrophys. 358, 593 (2000)
- [32] Townes C.H., E. H. Wishnow E.H., Hale D.D.S., Walp B., *A systematic change with time in the size of Betelgeuse*, Astrophys. J. 697, L127 (2009)
- [33] Yudin B.F., Fernie J.D., Ikhsanov N.R. et al., *UBVJHKLM photometry and modeling of R Coronae Borealis* Astron. Astrophys. 394, 617 (2002)
- [34] ???, ???

- [35] <http://www.phy.ornl.gov/astrophysics/data/cf88>
- [36] http://en.wikipedia.org/wiki/Abundance_of_the_chemical_elements
- [37] <http://ocl.sai.msu.ru/>
- [38] <http://www.univie.ac.at/webda/>
- [39] http://www.aavso.org/vsots_rcrb